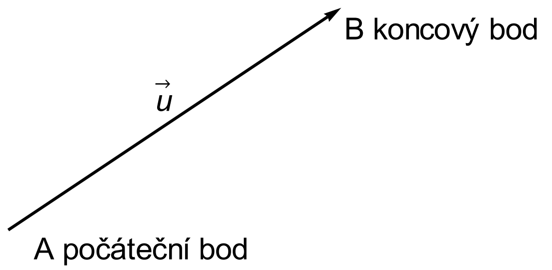
Vektory – teorie

Definice vektoru

Vektor je množina všech orientovaných úseček, které mají stejnou velikost a jsou souhlasně rovnoběžné.
Každá z jednotlivých orientovaných úseček se nazývá umístění daného vektoru.
Označení vektorů: $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}, \ldots$

Umístění vektoru

Zápis $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ **vyjadřuje: o**rientovaná úsečka $\overrightarrow{AB}$ je umístěním vektoru $\vec{u}$, A je počáteční bod, B koncový bod daného umístění.



Souřadnice vektoru

Určení souřadnic vektoru z grafu

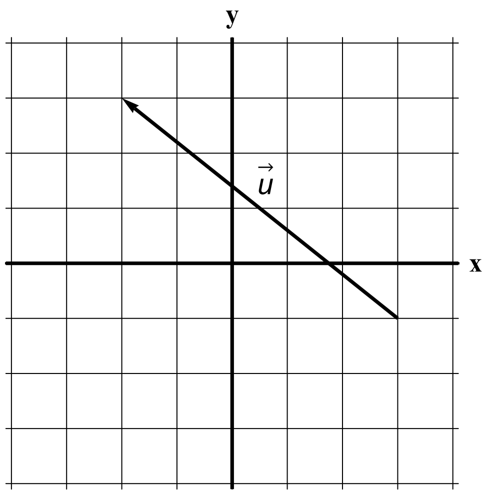
Souřadnice vektoru udávají, jak se z počátečního bodu dostaneme do koncového:

$$\vec{u} = (u_1; u_2)$$

posunutí ve směru osy x:
+ doprava
− doleva

posunutí ve směru osy y:
+ nahoru
− dolu

Například:



Souřadnice vektoru $\vec{u}$ jsou $\vec{u} = (-5; 4)$

Výpočet souřadnic vektoru

Je-li orientovaná úsečka $\overrightarrow{AB}$ umístěním vektoru $\vec{u}$, $A[a_1;a_2]$, $B[b_1;b_2]$, pak vektor $\vec{u}$ má souřadnice $\vec{u}=(u_1;u_2)$, které lze vypočítat pomocí vzorce:

$$\vec{u}=\overrightarrow{AB}=B-A: \quad \begin{aligned} u_1&=b_1-a_1\\ u_2&=b_2-a_2 \end{aligned}$$

Tj. od koncového bodu odečítáme počáteční bod.

Například:

$A[5;-8], B[-3;-4]$

$$\vec{u}=\overrightarrow{AB}=B-A: \begin{aligned} u_1&=-3-5=-8\\ u_2&=-4-(-8)=-4+8=4 \end{aligned}$$

$\vec{u}=(-8;4)$

Velikost vektoru

Velikost vektoru $\vec{u}=(u_1;u_2)$ se označuje $|\vec{u}|$, lze ji určit pomocí vzorce $|\vec{u}|=\sqrt{u_1^2+u_2^2}$.

Například:

$\vec{u}=(-5;4)$, $|\vec{u}|=\sqrt{(-5)^2+4^2}=\sqrt{25+16}=\sqrt{41}$

Součet vektorů

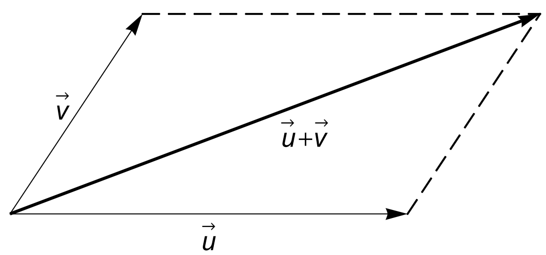
$\vec{u}=(u_1;u_2)$, $\vec{v}=(v_1;v_2)$

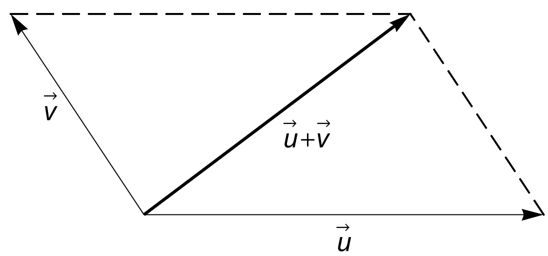
$\vec{u}+\vec{v}=(u_1+v_1;u_2+v_2)$

Například:

$\vec{u}=(-2;\ 5)$, $\vec{v}=(8;6)$

$\vec{u}+\vec{v}=(-2+8;\ 5+6)=(6;11)$





Násobení vektoru reálným číslem

$\vec{u}=(u_1;u_2)$, $k\cdot\vec{u}=(k\cdot u_1;k\cdot u_2)$

Například:

$\vec{u}=(-4;3)$

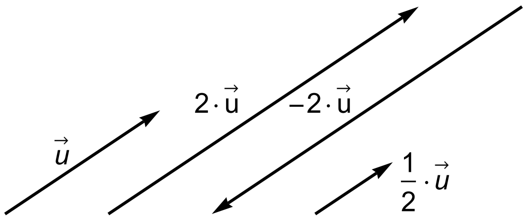
$3\cdot\vec{u}=(-12;9)$

$(-2)\cdot\vec{u} = (8; -6)$

$\frac{1}{2}\cdot\vec{u} = \left(-2; \frac{3}{2}\right)$

Jestliže daný vektor násobíme reálným číslem, pak výsledný vektor je s daným vektorem rovnoběžný.
Orientace k – násobku daného vektoru je pro $k > 0$ stejná, pro $k < 0$ opačná než má daný vektor.
Velikost k – násobku daného vektoru $\vec{u}$ je rovna $|k|\cdot|\vec{u}|$.
Například:

$2\cdot\vec{u}$	orientace stejná jako $\vec{u}$, velikost dvojnásobná
$(-2)\cdot\vec{u}$	orientace opačná než $\vec{u}$, velikost dvojnásobná
$\frac{1}{2}\cdot\vec{u}$	orientace stejná jako $\vec{u}$, velikost je rovna $\frac{1}{2}$ velikosti $\vec{u}$



Skalární součin vektorů

$\vec{u} = (u_1, u_2)$

$\vec{v} = (v_1, v_2)$

Skalární součin vektorů $\vec{u}, \vec{v}$ je číslo určené vzorcem:

$\vec{u}\cdot\vec{v} = u_1v_1 + u_2v_2$

Například:

$\vec{u} = (-5; 3), \vec{v} = (2; 4)$

$\vec{u}\cdot\vec{v} = -5\cdot 2 + 3\cdot 4 = -10 + 12 = 2$

Úhel vektorů

$\vec{u} = (u_1, u_2)$, $\vec{v} = (v_1, v_2)$

Úhel vektorů lze vypočítat pomocí vzorce: $\cos\varphi = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|}$, $\varphi \in \langle 0°; 180°\rangle$

Například: Určete úhel vektorů $\vec{u}$ = (5, 1), $\vec{v}$ = (–3, 4).

$$\cos\phi = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|} = \frac{5\cdot(-3) + 1\cdot 4}{\sqrt{5^2 + 1^2}\cdot\sqrt{(-3)^2 + 4^2}} = -0,4314555$$

$\phi = 115,56°$

Rovnoběžnost vektorů

Vektory $\vec{u}=(u_1;u_2), \vec{v}=(v_1;v_2)$ jsou rovnoběžné, jestliže jeden vektor je násobkem druhého, tj. jestliže platí $\frac{u_1}{v_1}=\frac{u_2}{v_2}$.

Například: $\vec{u}=(-5;4)$, $\vec{v}=(10,-8)$ – vektory jsou rovnoběžné, protože $\frac{-5}{10}=\frac{4}{-8}$.

Jak určíme k danému vektoru vektor rovnoběžný?
Je to libovolný násobek daného vektoru.
Například:
$\vec{u}=(-5;\ 3)$, vektory rovnoběžné s vektorem $\vec{u}$ jsou vektory $(5;-3),(-10;6),(10;-6)$ a nekonečně mnoho dalších.

Kolmost vektorů

Vektory $\vec{u}=(u_1;u_2), \vec{v}=(v_1;v_2)$ jsou kolmé, jestliže jejich skalární součin je roven nule, tj. $u_1\cdot v_1+u_2\cdot v_2=0$.
Například:
$\vec{u}=(5;-3), \vec{v}=(-2;-4)$ nejsou kolmé, protože $5\cdot(-2)+(-3)\cdot(-4)=2$
$\vec{u}=(3;-2), \vec{v}=(4;6)$ jsou kolmé, protože $3\cdot 4+(-2)\cdot 6=0$

Jak určit k danému vektoru kolmý vektor?
Prohodíme souřadnice a u jedné z nich (je jedno u které) změníme znaménko.
Například: k vektoru $\vec{u}=(5;-3)$ je kolmý vektor $\vec{v}=(3;5)$, ale taky $\vec{w}=(-3;-5)$ a také jejich libovolné násobky.