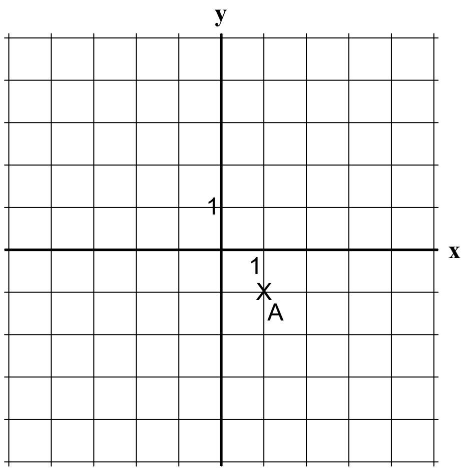
Příklady na vektory, 1. část

1) Jsou dány body $K = [8, 3]$, $L = [-5, 4]$. Určete souřadnice vektoru $\vec{u} = \overrightarrow{KL}$ a vektoru $\vec{v} = \overrightarrow{LK}$.

2) Umístěte vektor $\vec{u} = (-2,5)$ do bodu $A = [-3, 8]$, tj. určete souřadnice bodu B tak, aby orientovaná úsečka $\overrightarrow{AB}$ byla umístěním vektoru $\vec{u}$.

3) Orientovaná úsečka s počátečním bodem $P = [4; -1]$ je umístěním vektoru $\vec{v} = (2; -7)$. Určete souřadnice koncového bodu Q orientované úsečky.

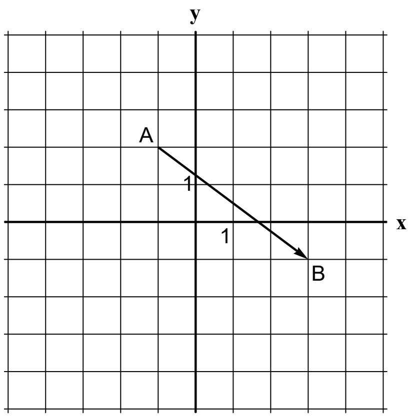
4) V rovině je umístěn bod A. Dále platí $\overrightarrow{AB} = \vec{v} = (-3; 4)$.



1. Zakreslete vektor $\vec{v}$.

2. Popište souřadnicemi koncový bod $B[x; y]$ orientované úsečky $\overrightarrow{AB}$.

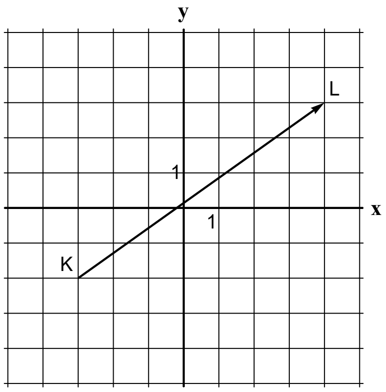
5) V rovině je umístěn vektor $\overrightarrow{AB} = (4; -3)$.



1. Určete velikost vektoru $\overrightarrow{AB}$.

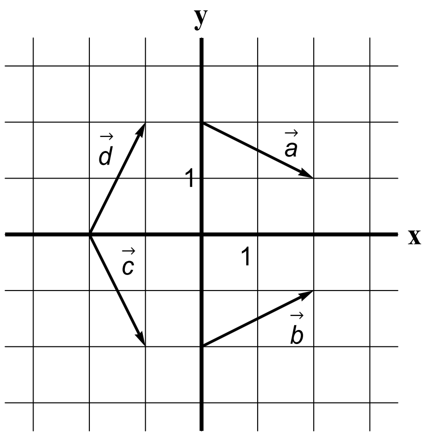
2. Doplňte souřadnice libovolného vektoru $\vec{n} = (x; y)$, který je k vektoru $\overrightarrow{AB}$ kolmý a má dvojnásobnou velikost.

6) V rovině je umístěn vektor $\overrightarrow{KL}$.



1. Určete souřadnice vektoru $\overrightarrow{AB}$
2. Určete velikost vektoru $\overrightarrow{KL}$
3. Určete souřadnice vektoru, který je kolmý k vektoru $\overrightarrow{KL}$ a má poloviční velikost.

7) Výchozí obrázek k úloze:



Který ze zobrazených vektorů má souřadnice $(2;-1)$?

8) Určete úhel vektorů $\vec{u}=(-2;5)$, $\vec{v}=(3;-2)$.

9) V rovině je dán trojúhelník *ABC*, kde $A=[12;8], B=[-3;-6], C=[-8;2]$. Určete velikost úhlu β.

Řešení

1)

$\vec{u} = \overrightarrow{KL} = L - K : u_1 = -5 - 8 = -13$

$u_2 = 4 - 3 = 1$

$\vec{u} = (-13;1)$

$\vec{v} = \overrightarrow{LK} = K - L : v_1 = 8 - (-5) = 13$

$v_2 = 3 - 4 = -1$

$\vec{v} = (13;-1)$

2)

$\vec{u} = \overrightarrow{AB} = B - A$

$B = \vec{u} + A: \ x = -2 + (-3) = -5$

$y = 5 + 8 = 13$

$B = [-5;13]$

3)

$\vec{v} = \overrightarrow{PQ} = Q - P$

$Q = \vec{v} + P: \ x = 2 + 4 = 6$

$y = -7 + (-1) = -8$

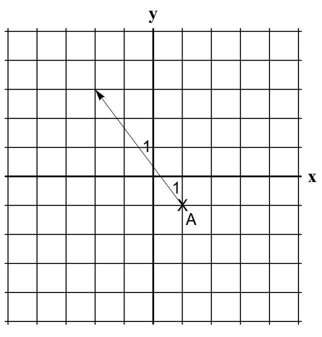
$Q = [6;-8]$

4)

Souřadnice počátečního bodu A odečteme z grafu: $A = [1;-1]$.

Souřadnice koncového bodu B určíme pomocí významu souřadnic vektoru: o 3 doleva a o 4 nahoru. Koncový bod B má souřadnice $B = [-2;3]$.

Nyní můžeme zakreslit vektor $\vec{v}$:



5)

1. $|\vec{u}| = \sqrt{{u_1}^2 + {u_2}^2} = \sqrt{4^2 + (-3)^2} = 5$

Velikost vektoru $\overrightarrow{AB}$ je 5.

2. Kolmý vektor k vektoru $\overrightarrow{AB} = (4; -3)$ je vektor $(3; 4)$, ten má ale stejnou velikost. Vektor s dvojnásobnou velikostí má souřadnice $\vec{n} = 2 \cdot (3; 4) = (6; 8)$.

Hledaný vektor $\vec{n}$ má souřadnice $\vec{n} = (6; 8)$, druhým řešením je vektor $-\vec{n} = (-6; -8)$.

6)

1. Souřadnice vektoru určíme pomocí jejich významu: o 7 doprava a o 5 nahoru.

Vektor $\overrightarrow{KL}$ má souřadnice $\vec{v} = (7; 5)$

2. $|\vec{v}| = \sqrt{{v_1}^2 + {v_2}^2} = \sqrt{7^2 + 5^2} = \sqrt{74}$

Vektor $\overrightarrow{KL}$ má velikost $\sqrt{74}$.

3. Kolmý vektor k vektoru $KL = (7; 5)$ je vektor $(-5; 7)$, ten má ale stejnou velikost. Vektor s poloviční velikostí má souřadnice $\vec{n} = \frac{1}{2} \cdot (-5; 7) = \left(-\frac{5}{2}; \frac{7}{2}\right)$.

Hledaný vektor $\vec{n}$ má souřadnice $\vec{n} = \left(-\frac{5}{2}; \frac{7}{2}\right)$, druhým řešením je vektor $-\vec{n} = \left(\frac{5}{2}; -\frac{7}{2}\right)$.

7)

Souřadnice vektoru $(2; -1)$ udávají, že z počátečního bodu do koncového půjdeme o 2 doprava a o 1 dolu. Toto splňuje pouze vektor $\vec{a}$.

8)

$\vec{u} = (-2; 5)$, $\vec{v} = (3; -2)$

$$\cos\varphi = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} = \frac{u_1 \cdot v_1 + u_2 \cdot v_2}{\sqrt{{u_1}^2 + {u_2}^2} \cdot \sqrt{{v_1}^2 + {v_2}^2}}$$

$$\cos\varphi = \frac{(-2) \cdot 3 + 5 \cdot (-2)}{\sqrt{(-2)^2 + 5^2} \cdot \sqrt{3^2 + (-2)^2}} = -0,8240$$

$\varphi = 145,49°$

9)

$A = [12;8], B = [-3;-6], C = [-8;2]$

Velikost úhlů v trojúhelníku můžeme počítat pomocí vzorce pro úhel vektorů, počáteční bod obou vektorů ale musí být vrchol trojůhelníku, který přísluší úhlu, který počítáme. Pro úhel β to je vrchol *B*. Proto

$$\vec{u} = \overrightarrow{BA} = A - B = (15;14)$$

$$\vec{v} = \overrightarrow{BC} = C - B = (-5;8)$$

$$c\operatorname{os}\varphi = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|} = \frac{u_1\cdot v_1 + u_2\cdot v_2}{\sqrt{{u_1}^2+{u_2}^2}\cdot\sqrt{{v_1}^2+{v_2}^2}} = \frac{15\cdot(-5)+14\cdot 8}{\sqrt{15^2+14^2}\cdot\sqrt{(-5)^2+8^2}} = 0{,}1911$$

$$\varphi = 78{,}98°$$