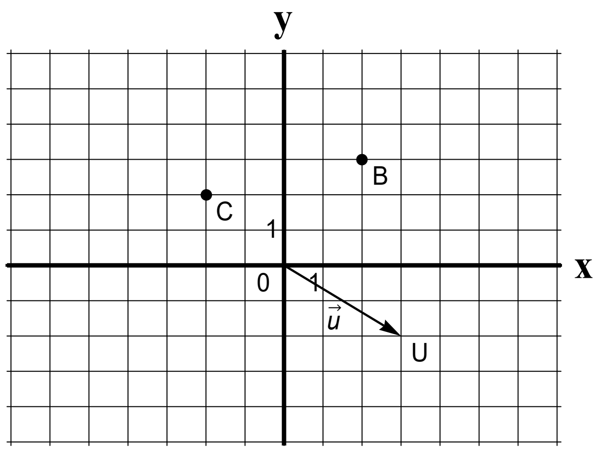
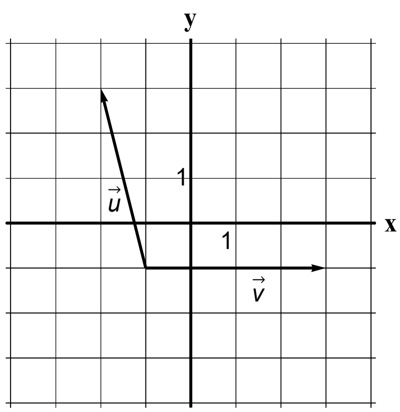
Příklady

1) V kartézské soustavě souřadnic *Oxy* sestrojíme bod A tak, aby orientované úsečky $\overrightarrow{AB}$ a $\overrightarrow{OU}$ určovaly tentýž vektor $\vec{u}$.



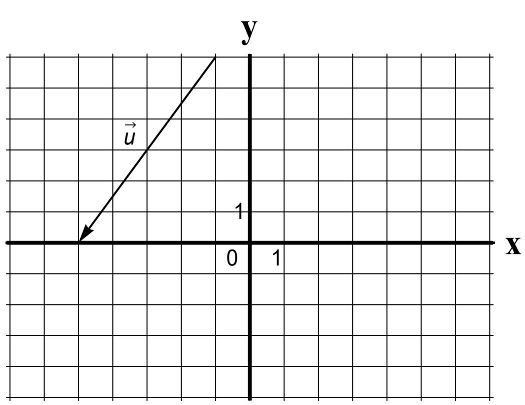
Body B, C, U jsou mřížové body. Jaká bude vzdálenost bodů A, C?

2)



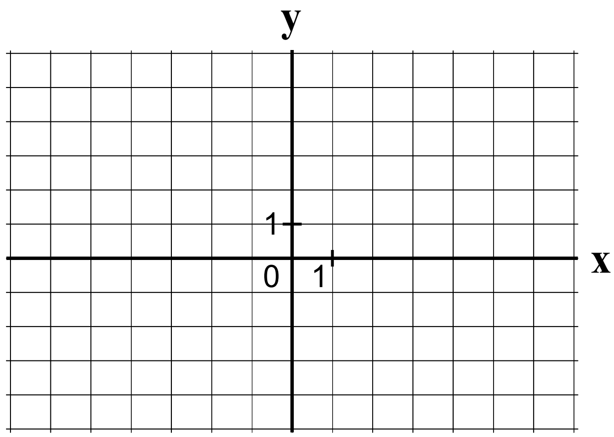
Platí: $\vec{w} = \vec{u} + \vec{v}$, určete souřadnice vektoru $\vec{w}$.

3) Umístěním vektoru $\vec{u}$ je orientovaná úsečka, jejíž počáteční i koncový bod leží v mřížovém bodě. Vektor $\vec{v} = (x;10)$ je k vektoru $\vec{u}$ kolmý.



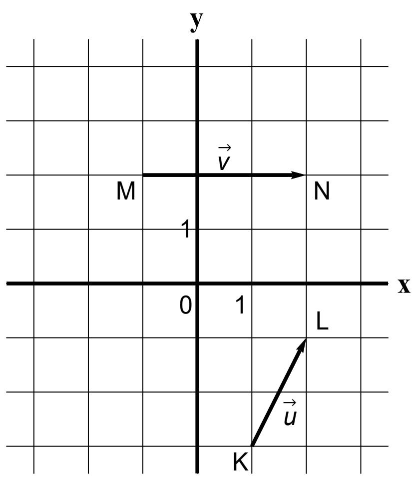
Jaká je souřadnice x vektoru $\vec{u}$?

4) Ve čtverci ABCD platí: $A[-1;1]$, $\overrightarrow{AC}=(6;\,4)$



a) V kartézské soustavě souřadnic Oxy sestrojte čtverec *ABCD*.
b) Zapište souřadnice středu S čtverce *ABCD*,
c) Vypočtěte velikost vektoru $\overrightarrow{AB}$ a výsledek uveďte bez zaokrouhlení.

5) V rovině jsou umístěny vektory $\vec{u}=\overrightarrow{KL}$ a $\vec{v}=\overrightarrow{MN}$. *K*, *L*, *M*, *N* jsou mřížové body.

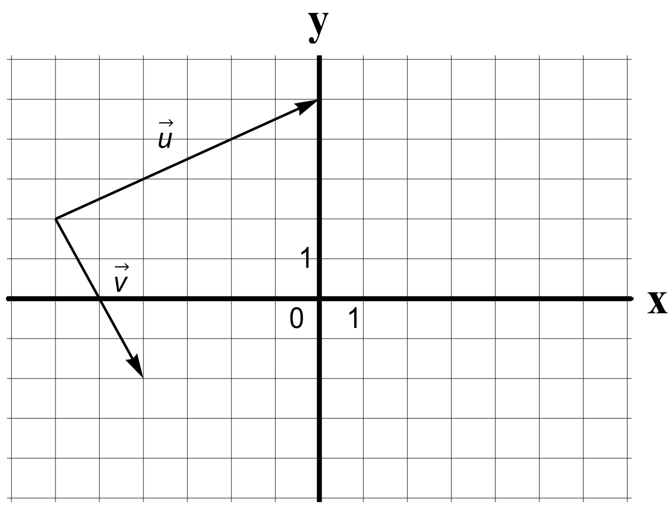


Ke každému vektoru (a – c) doplňte souřadnice (A – E) tak, aby byla splněna uvedená podmínka.
a) vektor $\vec{a}$, kde $\vec{a}=2\vec{u}$
b) vektor $\vec{b}$, kde $\vec{b}=\vec{u}+\vec{v}$
c) vektor $\vec{c}$, kde $\vec{c}\cdot\vec{u}=0$
A) $(4;2)$ B) $(2;4)$ C) $(2;-4)$ D) $(-2;-4)$ E) $(-4;2)$

6) Je dán vektor $\overrightarrow{AB}=(5;3)$ a body $A[a;-1]$, $B[4;b]$.
a) Vypočtěte chybějící souřadnici *a* bodu *A,*
b) Vypočtěte chybějící souřadnici *b* bodu *B.*

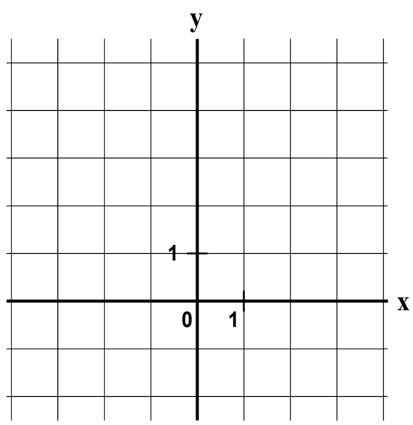
7) Jsou dány body A = [3; 2], B = [–4; 8] a C = [–10; –3]. Určete bod D tak, aby čtyřúhelník ABCD byl rovnoběžník.

8) Počáteční a koncové body vektorů $\vec{u}, \vec{v}$ jsou umístěny v mřížových bodech.



Určete souřadnice vektoru $\vec{w} = \vec{u} + \vec{v}$.

9) V obdélníku *ABCD* jsou dány vrcholy $A[-2; 3]$ a $D[-1; 5]$. Vrchol B leží na souřadnicové ose *x*. Určete souřadnice vrcholu *B*.

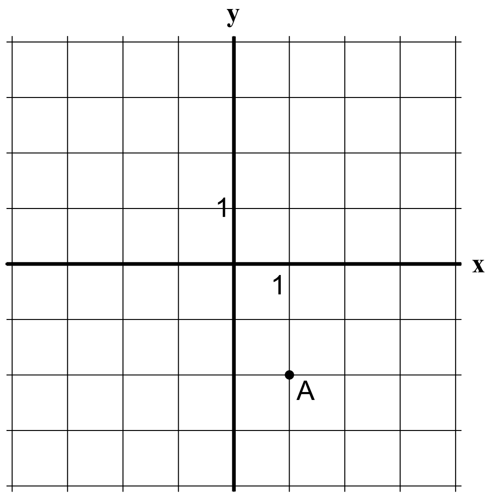


10) V trojúhelníku *ABC* platí: $\overrightarrow{AB} = (-1; 3)$, $\overrightarrow{BC} = (6; 9)$. Jaká je délka strany *AC*?

11) V kartézské soustavě souřadnic Oxy je (v mřížovém bodě) umístěn bod A.

Dále platí: $\overrightarrow{AB} = (-4; 2)$ a $\overrightarrow{AC} = (-4; 3)$.

Určete vzdálenost bodu *A* od přímky *BC*.

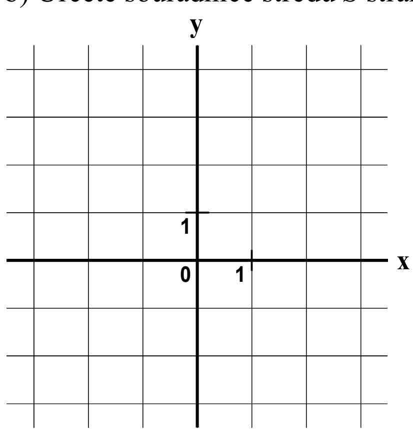


12) Čtverec *ABCD* s úhlopříčkou *AC* je umístěn v kartézské soustavě souřadnic *Oxy*. Platí: $A[-4;0], \overrightarrow{AC} = (6;4)$. Jaké jsou souřadnice středu S čtverce *ABCD*?

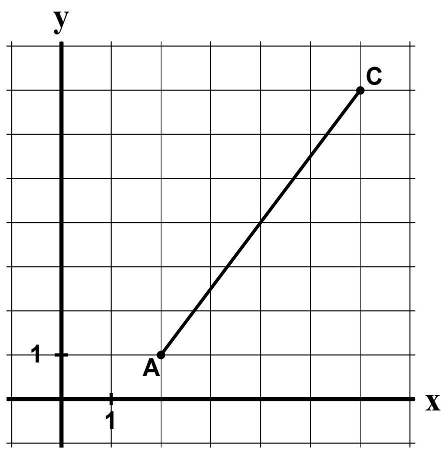
13) V trojúhelníku ABC je dáno: $A = [-2; -1]$, $C = [-1; 3]$, $\overrightarrow{CB} = \vec{a} = (2; -3)$.

a) Sestrojte trojúhelník ABC v soustavě souřadnic,

b) Určete souřadnice středu *S* strany *AC*.



14) V kartézské soustavě souřadnic *Oxy* je umístěna úhlopříčka *AC* rovnoběžníku *ABCD*. Pro druhou úhlopříčku *f* platí: $\overrightarrow{BD} = \vec{u} = (-4;\, 2)$.

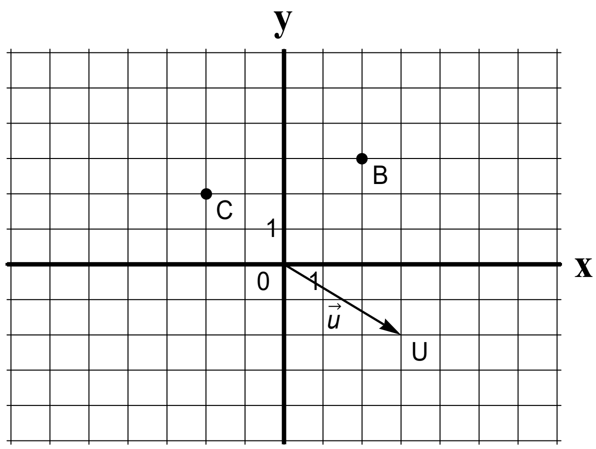


a) Umístěte a popište vrcholy *B*, *D* a zakreslete čtyřúhelník *ABCD,*

b) Vypočtěte délku úhlopříčky *BD*. Nezaokrouhlujte.

Řešení

1) V kartézské soustavě souřadnic Oxy sestrojíme bod A tak, aby orientované úsečky $\overrightarrow{AB}$ a $\overrightarrow{OU}$ určovaly tentýž vektor $\vec{u}$.



Body B, C, U jsou mřížové body. Jaká bude vzdálenost bodů A, C?

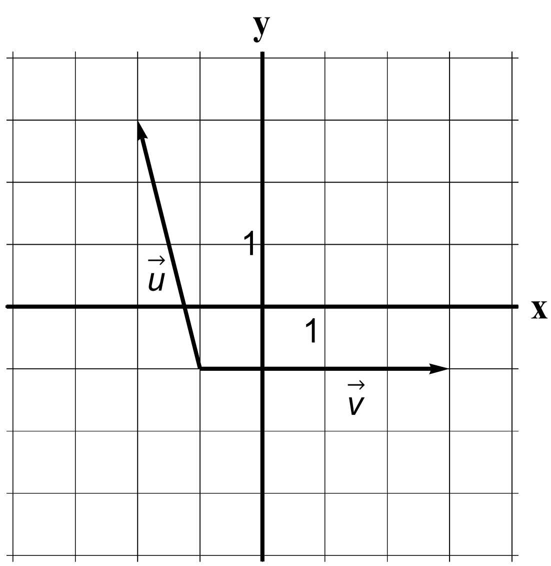
Postup

$\vec{u} = \overrightarrow{OU} = (3; -2) \Rightarrow A = [-1; 5]$

$|AC| = \sqrt{(3+1)^2 + (5+2)^2} = \sqrt{65}\ j$

---

2)



Platí: $\vec{w} = \vec{u} + \vec{v}$, určete souřadnice vektoru $\vec{w}$.

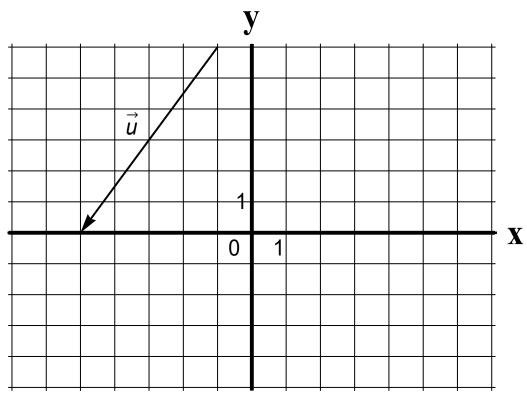
Postup

$\vec{u} = (-1; 4)$, $\vec{v} = (4; 0)$

$\vec{w} = \vec{u} + \vec{v} = (-1; 4) + (4; 0) = (3; 4)$

---

3) Umístěním vektoru $\vec{u}$ je orientovaná úsečka, jejíž počáteční i koncový bod leží v mřížovém bodě. Vektor $\vec{v}=(x;10)$ je k vektoru $\vec{u}$ kolmý.



Jaká je souřadnice x vektoru $\vec{u}$?

Postup

$\vec{u}=(-4;-6)$, $\vec{v}=(x;10)$

Vektory jsou kolmé, proto musí platit $\vec{u}\cdot\vec{v}=0 \Rightarrow$

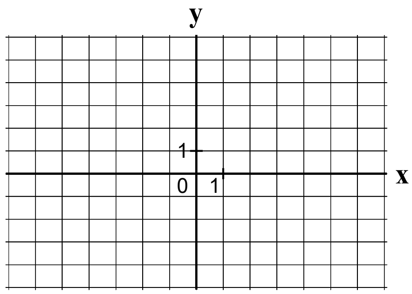
$(-4)\cdot x+(-6)\cdot 10=0$

$-4x=60$

$x=-15$

---

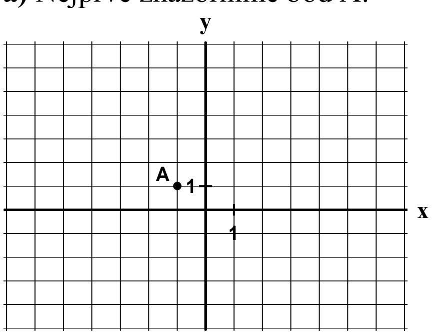
4) Ve čtverci ABCD platí: $A[-1;1]$, $\overrightarrow{AC}=(6;\ 4)$



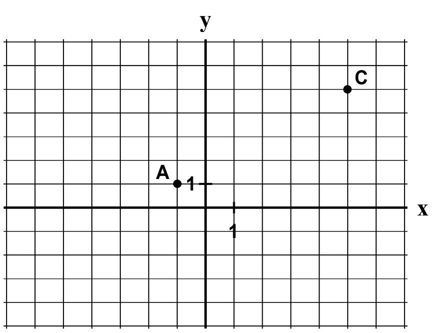
a) V kartézské soustavě souřadnic Oxy sestrojte čtverec *ABCD*.
b) Zapište souřadnice středu S čtverce *ABCD*,
c) Vypočtěte velikost vektoru $\overrightarrow{AB}$ a výsledek uveďte bez zaokrouhlení.

Postup

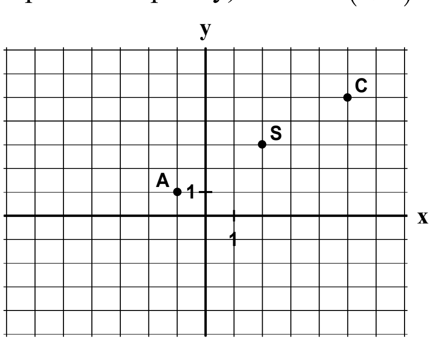
a) Nejprve znázorníme bod A:



vektor $\overrightarrow{AC}=(6;\ 4)$ nám říká, že z A do C jdeme o 6 doprava a o 4 nahoru $\Rightarrow C=[5;5]$

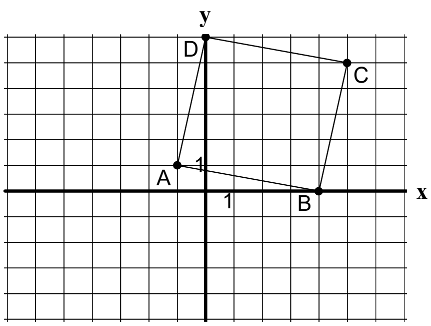


Teď si vyneseme střed čtverce: protože $\overrightarrow{AC}=(6;\ 4)$, tak $\overrightarrow{AS}$ musí být poloviční (střed je v půlce úhlopříčky) $\Rightarrow \overrightarrow{AS}=(3;\ 2) \Rightarrow S=[2;3]$



Úhlopříčky čtverce jsou na sebe kolmé a půlí se, proto vektor $\overrightarrow{AS}$ je kolmý k vektoru $\overrightarrow{SB}$ i k vektoru $\overrightarrow{SD}$.

K vektoru $\overrightarrow{AS} = (3;\, 2)$ utvoříme kolmý vektor $(-2;\, 3)$ nebo $(2; -3)$. Vektor $(2; -3)$ nás zavede do bodu B, vektor $(-2;\, 3)$ nás zavede do bodu D.

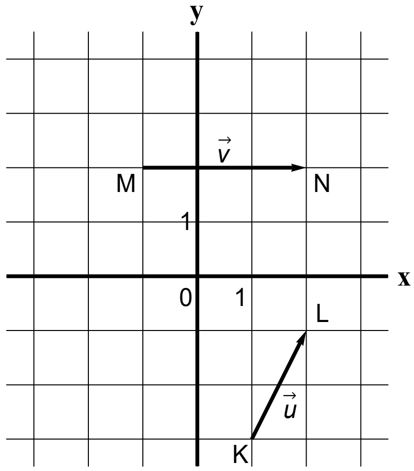


b) Souřadnice středu S jsme už určili: $S = [2;3]$

c) $\overrightarrow{AB} = (5; -1), \left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{5^2 + (-1)^2} = \sqrt{26}$ j

---

5) V rovině jsou umístěny vektory $\vec{u} = \overrightarrow{KL}$ a $\vec{v} = \overrightarrow{MN}$. K, L, M, N jsou mřížové body.



Ke každému vektoru (a – c) doplňte souřadnice (A – E) tak, aby byla splněna uvedená podmínka.

a) vektor $\vec{a}$, kde $\vec{a} = 2\vec{u}$

b) vektor $\vec{b}$, kde $\vec{b} = \vec{u} + \vec{v}$

c) vektor $\vec{c}$, kde $\vec{c} \cdot \vec{u} = 0$

A) $(4; 2)$ B) $(2; 4)$ C) $(2; -4)$ D) $(-2; -4)$ E) $(-4; 2)$

Postup

a) $\vec{u} = (1; 2), \vec{a} = 2\vec{u} = 2 \cdot (1; 2) = (2; 4)$

b) $\vec{u} = (1; 2), \vec{v} = (3; 0), \vec{b} = \vec{u} + \vec{v} = (1; 2) + (3; 0) = (4; 2)$

c) Tady je to nejjednodušší řešit zkusmo:

A) $(4; 2) \cdot (1; 2) = 4 \cdot 1 + 2 \cdot 2 = 8$,

B) $(2; 4) \cdot (1; 2) = 2 \cdot 1 + 4 \cdot 2 = 10$

atd.

správné je E) $(-4; 2) \cdot (1; 2) = (-4) \cdot 1 + 2 \cdot 2 = 0$

---

6) Je dán vektor $\overrightarrow{AB} = (5; 3)$ a body $A[a; -1]$, $B[4; b]$.

a) Vypočtěte chybějící souřadnici a bodu A,

b) Vypočtěte chybějící souřadnici b bodu B.

Postup

Nejjednodušší je řešit pomocí významu souřadnic vektoru: „jak se dostaneme z A do B“.

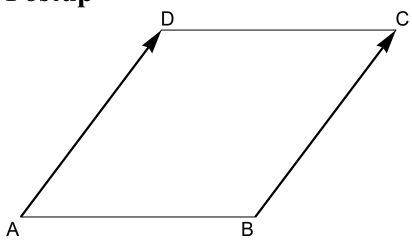
a) $a + 5 = 4 \Rightarrow a = -1$

b) $-1 + 3 = b \Rightarrow b = 2$

---

7) Jsou dány body $A = [3; 2]$, $B = [-4; 8]$ a $C = [-10; -3]$. Určete bod D tak, aby čtyřúhelník $ABCD$ byl rovnoběžník.

Postup



Pro rovnoběžník ABCD platí:

$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$

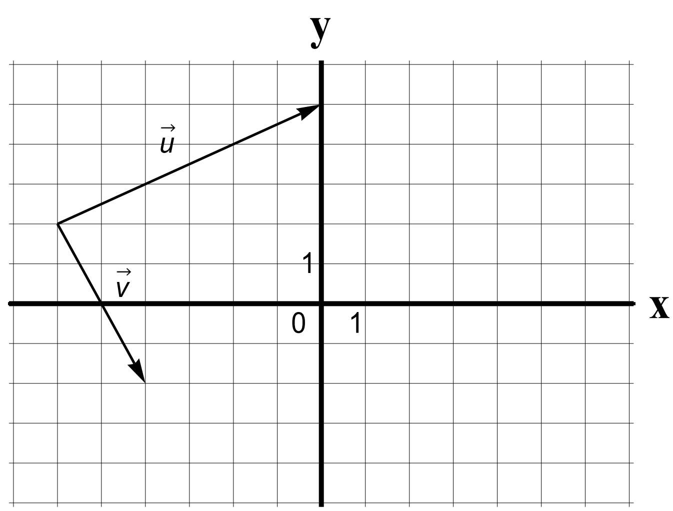
$C - B = D - A$

$D = C - B + A : x = -10 - (-4) + 3 = -3$

$y = (-3) - 8 + 2 = -9$

$D = [-3; -9]$

8) Počáteční a koncové body vektorů $\vec{u}, \vec{v}$ jsou umístěny v mřížových bodech.



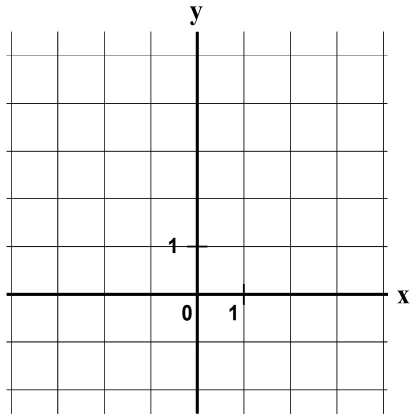
Určete souřadnice vektoru $\vec{w} = \vec{u} + \vec{v}$.

Postup

$\vec{u} = (6; 3); \vec{v} = (2; -4)$

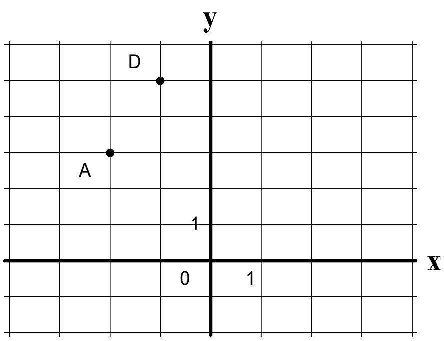
$\vec{w} = (8; -1)$

9) V obdélníku *ABCD* jsou dány vrcholy $A=[-2;\,3]$ a $D=[-1;\,5]$. Vrchol B leží na souřadnicové ose *x*. Určete souřadnice vrcholu *B*.



Postup

Do soustavy souřadnic vyneseme body $A[-2;\,3]$ a $D[-1;\,5]$.



Určíme souřadnice vektoru $\overrightarrow{AD}=(1;\,2)$.

Vrchol *B* má mít souřadnice $B=[x;\,0]$, určíme souřadnice vektoru $\overrightarrow{AB}$.

$\overrightarrow{AB}=B-A=(x-(-2);\,0-3)=(x+2;\,-3)$.

Protože se jedná o obdélník, tak vektory $\overrightarrow{AD}$ a $\overrightarrow{AB}$ musí být kolmé, tj. jejich skalární součin musí být roven nule a z této podmínky vypočítáme neznámou souřadnici *x*:

$(1;\,2)\cdot(x+2;\,-3)=0$

$1\cdot(x+2)+2\cdot(-3)=0$

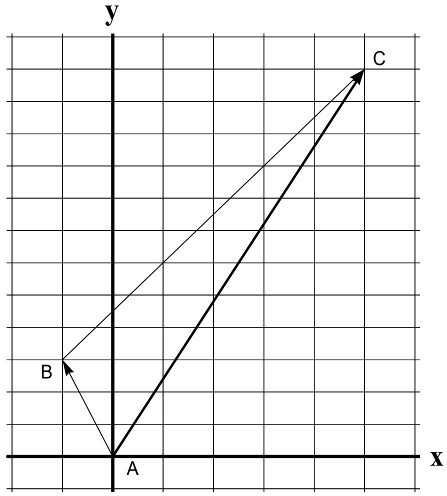
$x+2-6=0$

$x=4$

$B=[4;\,0]$

10) V trojúhelníku ABC platí: $\overrightarrow{AB} = (-1;\,3)$, $\overrightarrow{BC} = (6;\,9)$. Jaká je délka strany AC?

Postup



Z obrázku je patrné, že vektor $\overrightarrow{AC}$ je součtem vektorů $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$, proto

$$\overrightarrow{AC} = (-1;\,3) + (6;\,9) = (5;\,12)$$

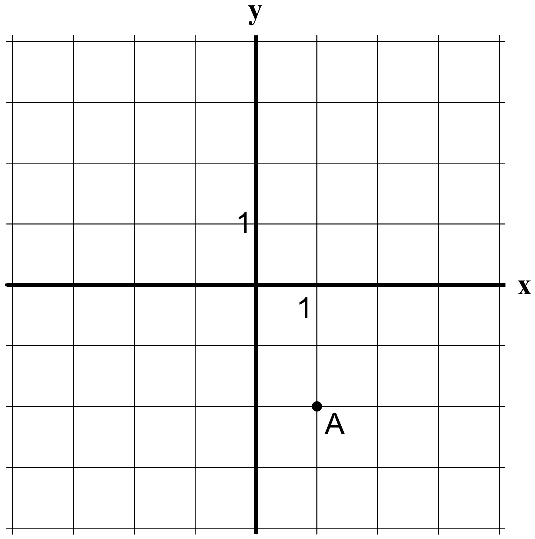
$$\left|\overrightarrow{AC}\right| = \sqrt{5^2 + 12^2} = 13$$

Délka strany AC je $13\ j$.

11) V kartézské soustavě souřadnic Oxy je (v mřížovém bodě) umístěn bod A.

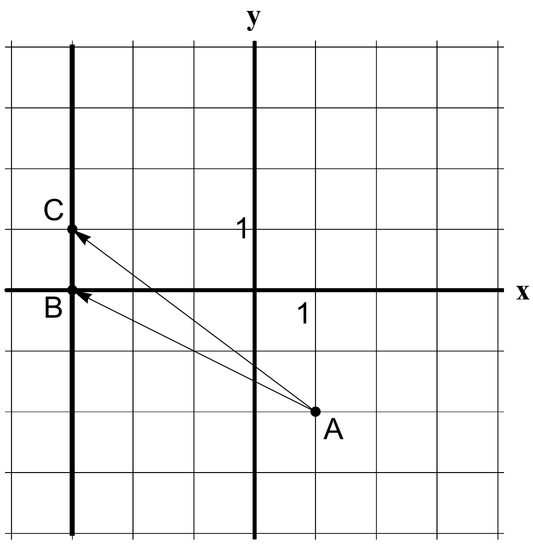
Dále platí: $\overrightarrow{AB} = (-4; 2)$ a $\overrightarrow{AC} = (-4; 3)$.

Určete vzdálenost bodu A od přímky BC.



Postup

Znázorníme si oba vektory a přímku BC:



Protože vzdálenost bodu od přímky se měří na kolmici, tak ´
vzdálenost bodu A od přímky BC je 4 *j*.

12) Čtverec $ABCD$ s úhlopříčkou AC je umístěn v kartézské soustavě souřadnic Oxy. Platí:

$A=[-4;0], \overrightarrow{AC}=(6;4)$. Jaké jsou souřadnice středu S čtverce $ABCD$?

Postup

$A[-4;0]$

Souřadnice vektoru $\overrightarrow{AC}=(6;4)$ udávají, jak se z bodu A dostaneme do bodu $C \Rightarrow C=[2;\ 4]$.

$S=\frac{A+C}{2}$: $x=\frac{-4+2}{2}=-1$

$y=\frac{0+4}{2}=2$

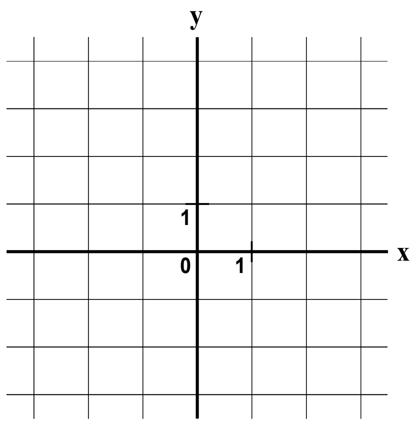
$S=[-1;\ 2]$

---

13) V trojúhelníku ABC je dáno: $A=[-2;\ -1]$, $C=[-1;\ 3]$, $\overrightarrow{CB}=\vec{a}=(2;\ -3)$.

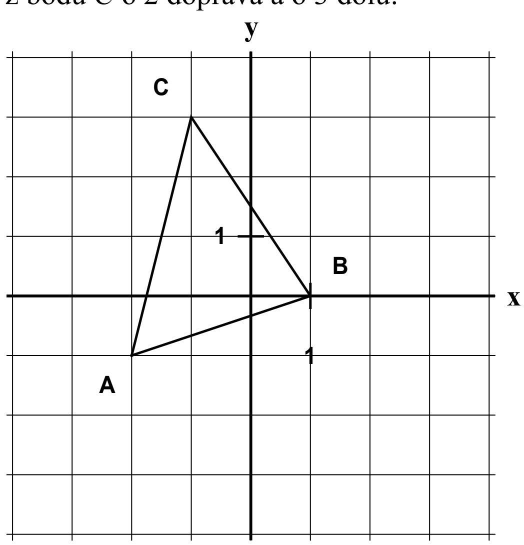
a) Sestrojte trojúhelník ABC v soustavě souřadnic,

b) Určete souřadnice středu S strany AC.



Postup

a) Body A a C známe, souřadnice bodu B určíme pomocí $\overrightarrow{CB}=\vec{a}=(2;\ -3)$ tak, že půjdeme z bodu C o 2 doprava a o 3 dolu:



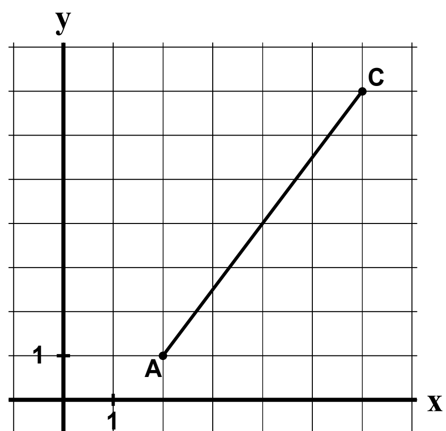
b)

$$S=\frac{A+C}{2}:\; x=\frac{(-2)+(-1)}{2}=-1{,}5$$

$$y=\frac{(-1)+3}{2}=1$$

$S=[-1{,}5;\,1]$

14) V kartézské soustavě souřadnic *Oxy* je umístěna úhlopříčka *AC* rovnoběžníku *ABCD*. Pro druhou úhlopříčku *f* platí: $\overrightarrow{BD}=\vec{u}=(-4;\,2)$.



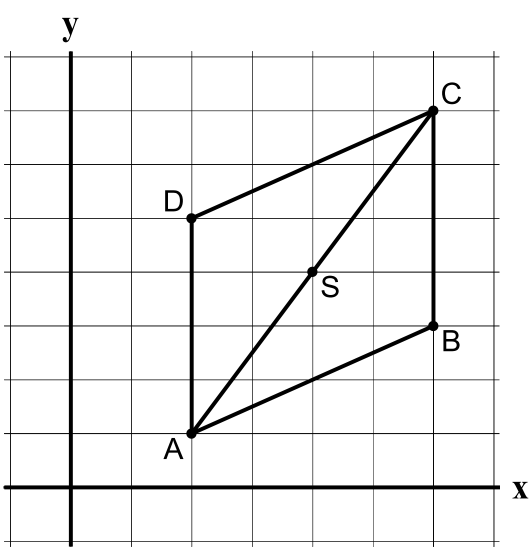
a) Umístěte a popište vrcholy *B*, *D* a zakreslete čtyřúhelník *ABCD,*

b) Vypočtěte délku úhlopříčky *BD*. Nezaokrouhlujte.

Postup

a) Úhlopříčky rovnoběžníku se půlí, takže bod *S* je středem úhlopříčky *AC* i *BD*.

$\overrightarrow{BD}=\vec{u}=(-4;\,2)\Rightarrow\overrightarrow{BS}=(-2;\,1),\overrightarrow{SD}=(-2;1)$.



$B=[6;3], D=[2;5]$

b) $|BD|=\sqrt{(6-2)^2+(5-3)^2}=\sqrt{20}\;j$