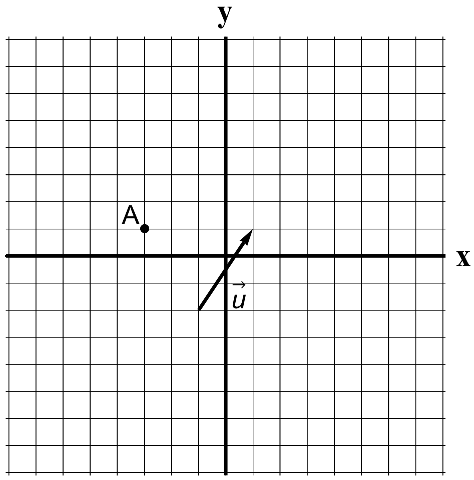
Parametrické vyjádření přímky

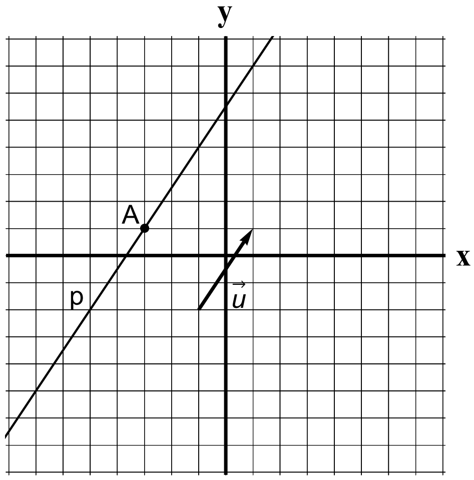
Teorie

Přímka může být zadána různými způsoby (dvěma body apod.), v této kapitole budeme předpokládat, že přímka je určená bodem a směrovým vektorem (vektor, který určuje směr přímky).

Např. bodem $A = [-3; 1]$ a směrovým vektorem $\vec{u} = (2; 3)$:



Přímka pak vypadá takto:



Parametrické vyjádření přímky dané bodem A a směrovým vektorem $\vec{u}$

1. Symbolický zápis

$X = A + t \cdot \vec{u},\ t \in R$

$X = [x; y]$	libovolný bod přímky
$A = [a_1; a_2]$	daný bod přímky
$\vec{u} = (u_1; u_2)$	směrový vektor přímky
t	parametr (libovolné reálné číslo)

2. Parametrické vyjádření přímky pomocí souřadnic

$x = a_1 + t \cdot u_1$

$y = a_2 + t \cdot u_2,\ \ t \in R$

Například:

$x = 5 + 4t$

$y = 2 - 8t\,,\quad t \in R$

Dále budeme většinou zápis $t \in R$ vynechávat.

Základní příklady

1. Jak určit parametrické vyjádření přímky dané bodem a směrovým vektorem.

Pouze dosadíme dané hodnoty do obecných rovnic $x = a_1 + t \cdot u_1 \quad ; \quad y = a_2 + t \cdot u_2$

Například

a) $A = [2; -3] \;;\; \vec{u} = (4;5)$

$x = 2 + 4t$

$y = -3 + 5t$

b) $A = [-8;5] \;;\; \vec{u} = (-2;1)$

$x = -8 - 2t$

$y = 5 + t$

c) $A = [7;\, 0] \;;\; \vec{u} = (6;\, 1{,}4)$

$x = 7 + 6t$

$y = 1{,}4t$

d) $A = [-5;-1] \;;\; \vec{u} = (0;9)$

$x = -5$

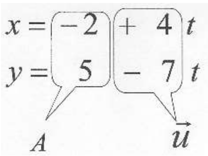
$y = -1 + 9t$

e) $A = [4;1] \;;\; \vec{u} = (3;\, 0)$

$x = 4 + 3t$

$y = 1$

2. Jak určit z parametrického vyjádření přímky její bod a směrový vektor.



$A = [-2;\, 5],\ \vec{u} = (4;\, -7)$

Bodů obsahuje přímka samozřejmě nekonečně mnoho, bod A je pouze jeden z nich.

Směrových vektorů dané přímky je také nekonečně mnoho, kromě vektoru $\vec{u} = (4;\, -7)$ je to také jakýkoliv jeho násobek, např. $\vec{u} = (-4;\, 7)$; $\vec{u} = (8;\, -14)$ atd.

Například

a)

$x = 2 - 5t$

$y = -1 + 3t$

$A = [2;\, -1],\ \vec{u} = (-5;\, 3)$

b)

$x = 4t$

$y = 8 + t$

$A = [0;\ 8]$, $\vec{u} = (4;\ 1)$

c)

$x = 4$

$y = 2 - 5t$

$A = [4;\ 2]$, $\vec{u} = (0;\ -5)$

3. Jak určit bod, který leží na přímce určené parametrickým vyjádřením.

Za parametr t zvolíme **libovolné** číslo a vypočítáme souřadnice x a y.
Určete alespoň tři body, které leží na přímce q: $x = -2 + 4t;\ y = 5 - 3t$

Například

$t = 1 \quad x = -2 + 4 \cdot 1 = 2\ ;\ y = 5 - 3 \cdot 1 = 2 \quad B_1 = [2;\ 2]$

$t = -1 \quad x = -2 + 4 \cdot (-1) = -6\ ;\ y = 5 - 3 \cdot (-1) = 8 \quad B_2 = [-6;\ 8]$

$t = 5 \quad x = -2 + 4 \cdot 5 = 18;\ y = 5 - 3 \cdot 5 = -10 \quad B_3 = [18;\ -10]$

4. Jak poznat, jestli zadaný bod leží na přímce určené parametrickým vyjádřením.

Do obou parametrických rovnic dosadíme za x a y souřadnice daného bodu a vypočítáme parametr t. Pokud je parametr t v obou případech stejný, tak bod leží na přímce, pokud je t vyjádřené z jedné rovnice jiné než z druhé, tak neleží.
Například: určete, zda body A = [5, 0], B = [5, 2], C = [–8, 7], D = [17, –6] leží na přímce $p: x = 2 + 3t;\ y = 4 - 2t$.

$A = [5;\ 0]$: $5 = 2 + 3t \Rightarrow t = 1$

$0 = 4 - 2t \Rightarrow t = 2$

t není stejné, bod A na přímce neleží

$B = [5;\ 2]$: $5 = 2 + 3t \Rightarrow t = 1$

$2 = 4 - 2t \Rightarrow t = 1$

t je stejné, bod B na přímce leží

$C = [-8;\ 7]$: $-8 = 2 + 3t \Rightarrow t = -\dfrac{10}{3}$

$7 = 4 - 2t \Rightarrow t = -\dfrac{3}{2}$

t není stejné, bod C na přímce neleží

$D = [17; -6]: 17 = 2 + 3t \Rightarrow t = 5$

$-6 = 4 - 2t \Rightarrow t = 5$

t je stejné, bod D na přímce leží

5. Jak určit chybějící souřadnici bodu, který leží na přímce určené parametrickým vyjádřením.

Danou souřadnici dosadíme do příslušné rovnice (pro x nebo pro y, podle toho, co známe) a vypočítáme t. Tuto hodnotu parametru t pak dosadíme do druhé rovnice a vypočítáme chybějící souřadnici.

Například: bod $R = [4; y]$ leží na přímce q: $x = 8 + 2t;\ y = 9 - 4t$. Určete chybějící souřadnici bodu R.

$4 = 8 + 2t \Rightarrow t = -2$

$y = 9 - 4 \cdot (-2) = 17$

Chybějící souřadnice bodu R je $y = 17$.

Tento postup také použijeme, když budeme počítat souřadnice průsečíku přímky se souřadnicovou osou x nebo y. Každý bod na ose x nebo y má jednu ze souřadnic rovnu 0.

6. Jak určit parametrické vyjádření přímky procházející dvěma danými body.

Napište parametrické vyjádření přímky procházející body $K = [-4; 3]$, $L = [8; -2]$.

Pro zápis parametrického vyjádření přímky potřebujeme znát souřadnice jednoho bodu, který leží na přímce. Zde známe dva body, můžeme použít K nebo L.
Dále potřebujeme směrový vektor přímky. Protože oba body K i L leží na přímce, tak vektor $\overrightarrow{KL}$ **je** směrový vektor přímky. $\vec{u} = \overrightarrow{KL} = L - K = (8 - (-4); -2 - 3) = (12; -5)$

Výsledky
s použitím bodu K:

$x = -4 + 12t$

$y = 3 - 5t$

s použitím bodu L:

$x = 8 + 12t$

$y = -2 - 5t$

Úloha má tedy dvě správná řešení, stačí samozřejmě uvést pouze jedno.
Další dvě správná řešení by vznikla, pokud bychom jako směrový vektor použili místo vektoru $\overrightarrow{KL}$ vektor $\overrightarrow{LK}$.