Aritmetická posloupnost

Co to je aritmetická posloupnost?

Řada čísel, která je určena prvním členem a_1 a diferencí d, další členy posloupnosti získáme tak, že vždy k **předchozímu** členu **přičítáme** diferenci.

Příklady aritmetických posloupností:

a_1	d	členy posloupnosti
5	3	5; 8; 11; 14; 17; ...
4	–2	4; 2; 0; –2; –4; –6; ...
–2	3	–2; 1; 4; 7; 10, ...
–5	–4	–5; –9; –13; –17; ...

Jak poznáme, jestli daná řada čísel je aritmetickou posloupností?

Jestliže od libovolného členu posloupnosti odečteme **předcházející** člen, musí vycházet vždy stejné číslo – toto číslo je diference aritmetické posloupnosti.

Příklady

řada čísel	je to aritmetická posloupnost?	diference
5; 13; 21; 29; 37; ...	ANO	8
–2; –5; –8; –11; ...	ANO	–3
1; 6; 11; 15; 19; ...	NE (rozdíl čtvrtého a třetího členu je jiný než rozdíl třetího a druhého členu)	

Důležité vzorce – všechny jsou uvedeny v MFCHT

Jak vypočítat libovolný člen, jestliže známe první člen a diferenci – vzorec pro *n*-tý člen

$$a_n = a_1 + (n-1)\cdot d$$

Např.: $a_5 = a_1 + 4d$, $a_{15} = a_1 + 14d$

Jak vypočítat součet prvních *n* členů

$$s_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$$

Např.: $s_{10} = \frac{10}{2}\cdot(a_1 + a_{10})$, $s_{15} = \frac{15}{2}\cdot(a_1 + a_{15})$

Jak určit libovolný člen, jestliže známe jiný člen a diferenci

$$a_r = a_s + (r-s)\cdot d$$

Např.: $a_{30} = a_{18} + (30-18)\cdot d$, $a_8 = a_{26} + (8-26)\cdot d$

Jak určit diferenci, jestliže známe libovolné dva členy

Tento vzorec vznikne úpravou předchozího vzorce.

$$d = \frac{a_r - a_s}{r-s}$$

Např.: $d = \frac{a_8 - a_5}{8-5}$, $d = \frac{a_{12} - a_3}{12-3}$, $d = \frac{a_9 - a_{21}}{9-21}$

Jak řešit některé příklady bez použití vzorců

1) Je zadán určitý člen posloupnosti a její diference, určete jiný člen.

Postup:

☞ pokud máme určit člen s vyšším pořadovým číslem, tak přičítáme diference,

☞ pokud máme určit člen s nižším pořadovým číslem, tak odečítáme diference.

Příklad a) Známe $a_{12} = 18,\ d = 6$, máme určit a_{19}.

Od a_{12} do a_{19} to je 7 „skoků“ dopředu, tj. přičteme sedm diferencí:

$a_{19} = a_{12} + 7d = 18 + 7 \cdot 6 = 60$

Příklad b) Známe $a_{25} = 64,\ d = 3$, máme určit a_{15}.

Od a_{25} do a_{15} to je 10 „skoků“ zpátky, tj. odečteme deset diferencí:

$a_{15} = a_{25} - 10d = 64 - 10 \cdot 3 = 34$

2) Známe dva členy posloupnosti, určete její diferenci

Příklad a) $a_{16} = 8;\ a_{19} = 26$, máme určit diferenci.

Z a_{16} do a_{19} se dostaneme třemi „skoky“, tj. třikrát přičítáme diferenci:

$8 + d + d + d = 26;\ 3d = 26 - 8;\ d = 6$

Příklad b) $a_{13} = 25;\ a_{17} = 9$, máme určit diferenci.

Z a_{13} do a_{17} se dostaneme čtyřmi „skoky“, tj. čtyřikrát přičítáme diferenci:

$25 + d + d + d + d = 9;\ 4d = 9 - 25;\ d = -4$

Základní příklady řešené pomocí vzorců

1) V aritmetické posloupnosti je $a_5 = 30$, $d = 8$. Určete a_1.

Řešení

Podle vzorce pro n-tý člen:

$a_5 = a_1 + 4d$

$a_1 = a_5 - 4d = 30 - 4 \cdot 8 = -2$

První člen posloupnosti $a_1 = -2$.

2) V aritmetické posloupnosti je dáno: $a_4 = 20$, $a_{10} = 62$. Určete *d*.

Řešení

Podle vzorce pro výpočet diference, jestliže známe libovolné dva členy:

$$d = \frac{a_{10} - a_4}{10 - 4} = \frac{62 - 20}{10 - 4} = 7$$

Diference posloupnosti je $d = 7$.

3) Je dána posloupnost 5; 8; 11; 14; 17; 20; 23; ... . Určete, kolikátým členem této posloupnosti je číslo 56.

Řešení

Na první pohled je zřejmé, že se jedná o aritmetickou posloupnost s prvním členem $a_1 = 5$ a diferencí $d = 3$. Použijeme vzorec pro n-tý člen: a_n známe, ale nevíme kolikátý to je člen, takže hledáme *n*.

$a_n = a_1 + (n-1)d$

$56 = 5 + (n-1) \cdot 3$

$56 = 5 + 3n - 3$

$n = 18$

56 je osmnáctý člen dané posloupnosti.

4) Určete součet 3,5 + 4 + 4,5 + 5 + ... + 15.

Řešení

Na první pohled je zřejmé, že se jedná o aritmetickou posloupnost s prvním členem $a_1 = 3{,}5$ a diferencí $d = 0{,}5$.

Použijeme vzorec pro součet prvních *n* členů posloupnosti, ale neznáme počet členů *n*. Ten určíme stejně, jako v předchozím příkladě.

$a_n = a_1 + (n-1)d$

$15 = 3{,}5 + (n-1) \cdot 0{,}5$

$15 = 3{,}5 + 0{,}5n - 0{,}5$

$n = 24$

Takže členů je 24 a jejich součet je:

$$s_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$$

$$s_{24} = \frac{24}{2}(3{,}5 + 15) = 222$$

Součet uvedených čísel je $s_{24} = 222$.

5) Určete součet $20+23+26+29+32+\ldots$. Čísel je celkem 18.

Řešení

Jedná se o aritmetickou posloupnost s prvním členem $a_1 = 20$ a diferencí $d = 3$.

Nejprve musíme určit hodnotu osmnáctého členu:

$a_{18} = a_1 + 17d = 20 + 17 \cdot 3 = 71$

Nyní již můžeme určit požadovaný součet:

$$s_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$$

$$s_{18} = \frac{18}{2}(20 + 71) = 819$$

Součet uvedených čísel je $s_{18} = 819$.

6) V aritmetické posloupnosti je dáno: $a_1 + a_4 = 26$ a zároveň $a_2 + a_5 = 30$. Určete součet prvních 10 členů.

Nejprve vyjádříme všechny členy v obou rovnicích pomocí prvního členu a_1 a diference d.

$a_1 + a_4 = 26$

$a_1 + a_1 + 3d = 26$

$a_2 + a_5 = 30$

$a_1 + d + a_1 + 4d = 30$

Po úpravě dostaneme soustavu rovnic, kde neznámé budou a_1 a d:

$2a_1 + 3d = 26$

$\underline{2a_1 + 5d = 30}$

Tuto soustavu vyřešíme třeba metodou sčítací a dostaneme $d = 2, a_1 = 10$.

$a_{10} = a_1 + 9d = 10 + 9 \cdot 2 = 28$

$$s_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$$

$$s_{10} = \frac{10}{2}(a_1 + a_{10}) = 5(10 + 28) = 190$$

Součet prvních 10 členů je 190.