

## Geometrická posloupnost

### Co to je geometrická posloupnost?

Řada čísel, která je určena prvním členem  $a_1$  a kvocientem  $q$ , další členy posloupnosti získáme tak, že vždy **předchozí** člen **násobíme** kvocientem.

### Příklady geometrických posloupností:

$a_1$	$q$	členy posloupnosti
5	2	5; 10; 20; 40; 80; ...
4	-2	4; -8; 16; -32; 64; ...
16	0,5	16; 8; 4; 2; 1; 0,5; ...
64	-0,25	64; -16; 4; -1; 0,25; ...

### Jak poznáme, jestli daná řada čísel je geometrickou posloupností?

Jestliže libovolný člen posloupnosti vydělíme **předcházejícím** členem, musí vycházet vždy stejné číslo – toto číslo je kvocient geometrické posloupnosti.

### Příklady

řada čísel	je to geometrická posloupnost?	kvocient
2; 6; 18; 54; ...	ANO	3
1; -2; 4; -8; 16; -32; ...	ANO	-2
32; 16; 8; 4; 2; 1; 0,5; ...	ANO	0,5

### Důležité vzorce – všechny jsou v MFCHT

**Jak vypočítat libovolný člen, jestliže známe první člen a kvocient – vzorec pro n-tý člen**

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

$$\text{Např.: } a_8 = a_1 \cdot q^7; a_{12} = a_1 \cdot q^{11}$$

**Jak vypočítat součet prvních n členů**

$$s_n = a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

$$\text{Např.: } s_{10} = a_1 \frac{q^{10} - 1}{q - 1}$$

**Jak určit libovolný člen, jestliže známe jiný člen a kvocient**

$$a_r = a_s \cdot q^{r-s}$$

$$\text{Např.: } a_{20} = a_{13} \cdot q^{20-13}$$

**Jak určit kvocient, jestliže známe libovolné dva členy**

Tento vzorec vznikne úpravou předchozího vzorce.

$$q = \sqrt[r-s]{\frac{a_r}{a_s}}$$

$$\text{Např.: } q = \sqrt[20-13]{\frac{a_{20}}{a_{13}}} = \sqrt[7]{\frac{a_{20}}{a_{13}}}$$

## Jak řešit některé příklady bez použití vzorců

### 1) Je zadán určitý člen posloupnosti a její kvocient, určete jiný člen.

Postup:

- ☞ pokud máme určit člen s vyšším pořadovým číslem, tak násobíme kvocientem,
- ☞ pokud máme určit člen s nižším pořadovým číslem, tak dělíme kvocientem.

**Příklad a)** Známe  $a_{12} = 3$ ,  $q = 2$ , máme určit  $a_{19}$ .

Od  $a_{12}$  do  $a_{19}$  to je 7 „skoků“ dopředu, tj. násobíme 7-krát kvocientem:

$$a_{19} = a_{12} \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 3 \cdot 2^7 = 384$$

**Příklad b)** Známe  $a_{25} = 64$ ,  $q = 2$ , máme určit  $a_{19}$ .

Od  $a_{25}$  do  $a_{19}$  to je 6 „skoků“ zpátky, tj. dělíme 6-krát kvocientem:

$$a_{19} = a_{25} : 2 : 2 : 2 : 2 : 2 : 2 = 64 : 2^6 = 1$$

### 2) Známe dva členy posloupnosti, určete její kvocient.

**Příklad a)**  $a_{16} = 5$ ;  $a_{19} = 135$ , máme určit kvocient.

Z  $a_{16}$  do  $a_{19}$  se dostaneme třemi „skoky“, tj. třikrát násobíme kvocientem:

$$5 \cdot q \cdot q \cdot q = 135; \quad q^3 = \frac{135}{5}; \quad q = 3$$

**Příklad b)**  $a_{13} = 64$ ;  $a_{17} = 4$ , máme určit kvocient.

Z  $a_{13}$  do  $a_{17}$  se dostaneme čtyřmi „skoky“, tj. čtyřikrát násobíme kvocientem:

$$64 \cdot q \cdot q \cdot q \cdot q = 4; \quad q^4 = \frac{4}{64}; \quad q = \frac{1}{2}.$$

## Základní příklady řešené pomocí vzorců

- 1) V geometrické posloupnosti je  $a_4 = 81$ ,  $q = 3$ . Určete  $a_1$ .

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

$$a_4 = a_1 \cdot q^3 \quad / : q^3$$

$$a_1 = \frac{a_4}{q^3} = \frac{81}{3^3} = 3$$

**První člen posloupnosti  $a_1 = 3$ .**

- 2) V geometrické posloupnosti je dáno:  $a_3 = 18$ ,  $a_4 = 162$ . Určete  $a_1$ .

$$q = \frac{a_4}{a_3} = \frac{162}{18} = 9$$

$$a_3 = a_1 \cdot q^2 \quad / : q^2$$

$$a_1 = \frac{a_3}{q^2} = \frac{18}{9^2} = \frac{2}{9}$$

**První člen posloupnosti  $a_1 = \frac{2}{9}$ .**

- 3) V geometrické posloupnosti je dáno:  $a_4 = 81$ ,  $a_9 = 19683$ . Určete  $q$ .

$$q = \sqrt[r-s]{\frac{a_r}{a_s}}$$

$$q = \sqrt[9-4]{\frac{a_9}{a_4}} = \sqrt[5]{\frac{19683}{81}} = 3$$

**Kvocient posloupnosti je  $q = 3$ .**

- 4) Určete součet čísel  $1 + 2 + 4 + 8 + 16 + \dots$ , čísel je celkem 25.

Jedná se o geometrickou posloupnost s  $a_1 = 1$ ,  $q = 2$ , máme vypočítat součet prvních 25 členů:

$$s_n = a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1}, \quad s_{25} = 1 \cdot \frac{2^{25} - 1}{2 - 1} = 33\,554\,431.$$

**Součet prvních 25 členů je 33 554 431.**

5) Určete součet čísel  $\frac{1}{8} + \frac{1}{2} + 2 + 8 + 32 + \dots + 131072$ .

Jedná se o geometrickou posloupnost s  $a_1 = \frac{1}{8}$ ,  $q = 4$ . Nejprve musíme určit počet čísel  $n$ .

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

$$131\,072 = \frac{1}{8} \cdot 4^{n-1} / \cdot 8$$

$$1048576 = 4^{n-1} / \log$$

$$\log 1048576 = (n-1) \cdot \log 4$$

$$n-1 = \frac{\log 1048576}{\log 4} = 10$$

$$n = 11$$

$$s_n = a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

$$s_{11} = \frac{1}{8} \cdot \frac{4^{11} - 1}{4 - 1} = 174\,762,625$$

**Součet čísel je 174 762,625.**