

Kvadratická funkce

Definice kvadratické funkce

Kvadratická funkce je funkce určená funkční rovnicí

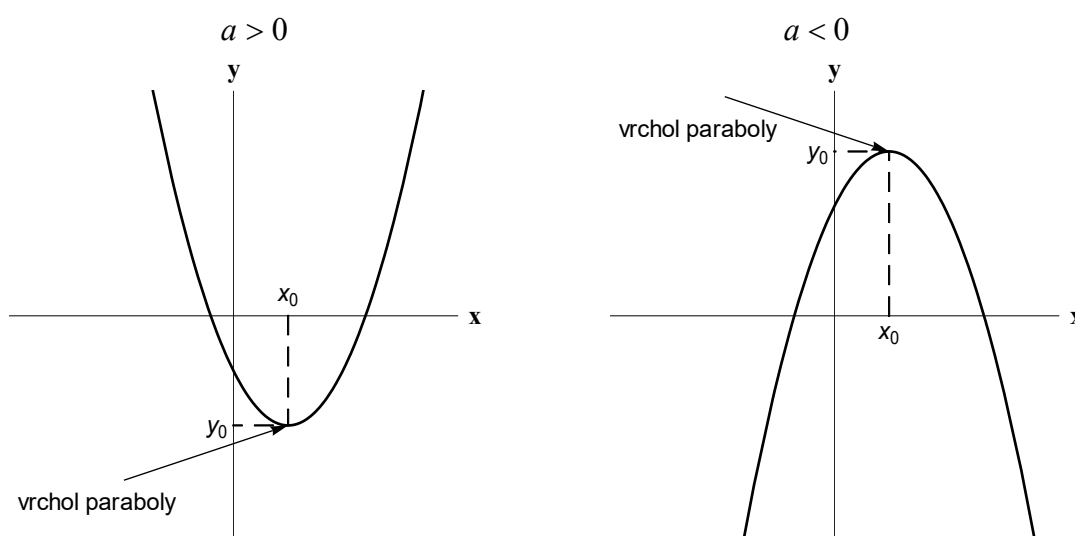
$$y = ax^2 + bx + c \quad x \in (-\infty; +\infty)$$

$$a, b, c \in \mathbb{R}$$

$$a \neq 0$$

Např.: $y = x^2 + 2x + 3$; $y = -x^2 - 4x + 2$; $y = 3x^2 + 2$; $y = 2x^2 + 5x$; $y = 2x^2$; $y = -0,2x^2$

Graf



Grafem kvadratické funkce je parabola s vrcholem $V = [x_0; y_0]$, parabola je osově souměrná podle osy procházející vrcholem paraboly rovnoběžně s osou y .

Obor funkčních hodnot

pro $a > 0$: $y \in \langle y_0; \infty \rangle$

pro $a < 0$: $y \in (-\infty; y_0 \rangle$

Určení vrcholu paraboly

Využijeme toho, že parabola je osově souměrná podle osy procházející vrcholem paraboly rovnoběžně s osou y . Do funkční rovnice dosadíme za y libovolnou přípustnou hodnotu a určíme příslušné hodnoty x_1, x_2 , x -ová souřadnice vrcholu x_0 leží uprostřed mezi hodnotami x_1, x_2 .

Nejjednodušší je dosadit za y hodnotu koeficientu c .

y -ovou souřadnici vrcholu y_0 určíme dosazením x_0 do funkční rovnice.

Příklad

Je dána funkce $y = 2x^2 - 8x + 5$, určete souřadnice vrcholu paraboly.

Za y dosadíme hodnotu koeficientu c , tj. 5

$$5 = 2x^2 - 8x + 5$$

$$2x^2 - 8x = 0$$

$$x \cdot (2x - 8) = 0$$

$$x_1 = 0; x_2 = 4$$

x -ová souřadnice středu leží uprostřed mezi hodnotami x_1, x_2 , tj. $x_0 = 2$

$$y_0 = 2 \cdot 2^2 - 8 \cdot 2 + 5 = -3$$

Vrchol paraboly má souřadnice $[2; -3]$

Výpočet průsečíků grafu s osou x

Do funkční rovnice dosadíme za y číslo 0 a řešíme příslušnou kvadratickou rovnici.

Průsečíky jsou body $[x_1; 0]$ a $[x_2; 0]$, kde x_1 a x_2 je řešení příslušné kvadratické rovnice.

Mohou nastat tyto případy:

$D > 0 \Rightarrow$ graf protíná osu x ve dvou bodech

$D = 0 \Rightarrow$ graf se dotýká osy x v jednom bodě

$D < 0 \Rightarrow$ graf nemá s osou x žádný společný bod

Příklady

1) Je dána funkce $y = 2x^2 - 3x - 5$, určete průsečíky grafu funkce s osou x .

$$0 = 2x^2 - 3x - 5$$

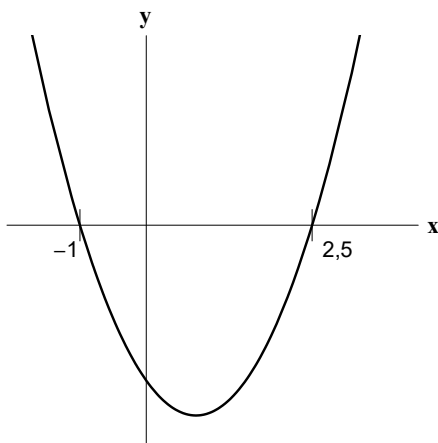
$$a = 2; b = -3; c = -5$$

$$D = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-5) = 49$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{-(-3) \pm \sqrt{49}}{2 \cdot 2}$$

$$x_1 = 2,5; x_2 = -1$$

Průsečíky grafu funkce s osou x jsou body o souřadnicích $[2,5; 0]$ a $[-1; 0]$.



2) Je dána funkce $y = x^2 - 4x + 4$, určete průsečíky grafu funkce s osou x .

$$0 = x^2 - 4x + 4$$

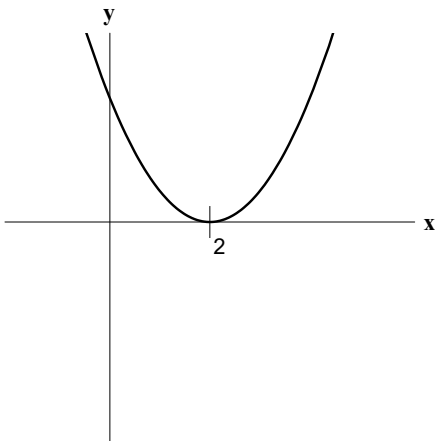
$$a = 1; b = -4; c = 4$$

$$D = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{-(-4) \pm \sqrt{0}}{2 \cdot 1}$$

$$x_1 = 2$$

Průsečíkem grafu funkce s osou x je bod o souřadnicích $[2; 0]$ – funkce se dotýká osy x v bodě $[2; 0]$.



3) Je dána funkce $y = 2x^2 - 2x + 1$, určete průsečíky grafu funkce s osou x .

$$0 = 2x^2 - 2x + 1$$

$$a = 2; b = -2; c = 1$$

$$D = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 1 = -4$$

$D < 0$ – rovnice nemá řešení \Rightarrow průsečíky s osou x neexistují.

