Řešení obecného trojúhelníku

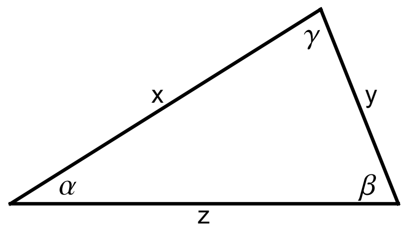
Trojúhelník je jednoznačně určen třemi prvky:
- tři strany (věta sss)
- dvě strany a úhel jimi sevřený (věta sus)
- dvě strany a úhel proti větší z nich (věta Ssu)
- jedna strana a libovolné dva úhly (věta usu)

Řešení obecného trojúhelníku (tj. ne pravoúhlého): trojúhelník je zadán třemi prvky a my máme určit libovolný zbývající prvek (stranu nebo úhel).
Pro řešení obecného trojúhelníku se používají trigonometrické věty: sinová věta a kosinová věta.

Trigonometrické věty

Sinová věta

Slovní vyjádření:
Poměr libovolných dvou stran trojúhelníku je roven poměru sinů protilehlých úhlů.
Například



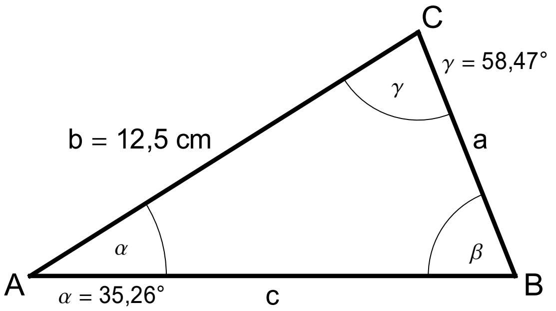
$\frac{x}{y}=\frac{\sin\beta}{\sin\alpha}$ $\frac{z}{x}=\frac{\sin\gamma}{\sin\beta}$ $\frac{\sin\alpha}{\sin\gamma}=\frac{y}{z}$ apod.

- sinovou větu používáme v případě, že v trojúhelníku známe dvojici protilehlých prvků (strana – úhel).
- pomocí sinové věty můžeme počítat pouze prvek (stranu nebo úhel) u něhož známe protilehlý prvek (úhel nebo stranu).
- pro výpočet je vhodné začít tím, co počítáme (tj. dát prvek, který počítáme, do čitatele zlomku na levé straně sinové věty).

Vzorové příklady

1) V trojúhelníku ABC je dáno: α = 35,26°, γ = 58,47°, b = 12,5 cm. Určete zbývající strany a úhly trojúhelníku.

Bez obrázku to nejde:



Neznáme dvojici protilehlých prvků, ale můžeme ji znát, pokud dopočítáme velikost úhlu β.
1) β = ?
$\beta = 180° - 35,26° - 58,47° = 86,27°$
Nyní známe dvojici protilehlých prvků $\beta \leftrightarrow b$, takže můžeme použít sinovou větu k výpočtu strany a.

2) $a = ?$

a) připravíme si „kostru“ sinové věty $\frac{}{} = \frac{}{}$

b) do čitatele zlomku na levé straně napíšeme veličinu, kterou hledáme, tj. *a:* $\frac{a}{} = \frac{}{}$

c) ve jmenovateli musí být strana, kterou známe, tj. *b*: $\frac{a}{b} = \frac{}{}$

d) na pravé straně musí být sinus protilehlých úhlů: $\frac{a}{b} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}$

Tím máme sestavenou sinovou větu a další postup už je jednoduchý:

$$\frac{a}{b} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta} \quad / \cdot b$$

$$a = b \cdot \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}$$

$$a = 12{,}5 \cdot \frac{\sin 35{,}26°}{\sin 86{,}27°} = 7{,}2$$

$$b = 7{,}2\ cm$$

Podobně spočítáme stranu *c*.

3) $c = ?$

$$\frac{c}{b} = \frac{\sin\gamma}{\sin\beta} \quad / \cdot b$$

$$c = b \cdot \frac{\sin\gamma}{\sin\beta}$$

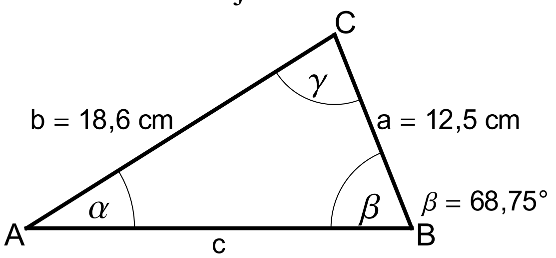
$$a = 12{,}5 \cdot \frac{\sin 58{,}47°}{\sin 86{,}27°} = 10{,}7$$

$$c = 10{,}7\ cm$$

---

2) V trojúhelníku ABC je dáno: β = 68,75°, a = 12,5 cm, b = 18,6 cm. Určete zbývající strany a úhly trojúhelníku.

Bez obrázku to nejde.



Známe dvojici protilehlých prvků $\beta \leftrightarrow b$, takže můžeme použít sinovou větu k výpočtu úhlu α (tento úhel můžeme počítat, protože známe protilehlý prvek, stranu *a;* stranu *c* ani úhel γ zatím počítat nemůžeme).

1) α = ?

a) připravíme si „kostru“ sinové věty $\frac{}{} = \frac{}{}$

b) do čitatele zlomku na levé straně napíšeme veličinu, kterou hledáme, tj. sin α*:* $\frac{\sin\alpha}{} = \frac{}{}$

c) ve jmenovateli musí být sin úhlu, který známe, tj. sin β: $\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{}{}$

d) na pravé straně musí být protilehlé strany: $\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{a}{b}$

Tím máme sestavenou sinovou větu a další postup už je jednoduchý:

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{a}{b} \quad / \cdot \sin\beta$$

$$\sin\alpha = \sin\beta \cdot \frac{a}{b}$$

$$\sin\alpha = \sin 68,75° \cdot \frac{12,5}{18,6} = 0,6263$$

$$\alpha = 38,78°$$

Nyní dopočítáme úhel γ, abychom mohli určit protilehlou stranu *c*.

2) γ = ?

$$\gamma = 180° - 38,78° - 68,75° = 72,47°$$

3) *c* = ?

$$\frac{c}{a} = \frac{\sin\gamma}{\sin\alpha} \quad / \cdot a$$

$$c = a \cdot \frac{\sin\gamma}{\sin\alpha} = 12,5 \cdot \frac{\sin 72,47°}{\sin 38,78°} = 19,0\ cm$$

šlo by i

$$\frac{c}{b} = \frac{\sin\gamma}{\sin\beta} \quad / \cdot b$$

$$c = b \cdot \frac{\sin\gamma}{\sin\beta} = 18,6 \cdot \frac{\sin 72,47°}{\sin 68,75°} = 19,0\ cm$$

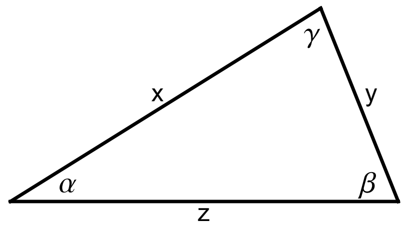
Kosinová věta

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos\alpha$$

Důležité k zapamatování:

levá strana kosinové věty: libovolná strana trojúhelníku
pravá strana kosinové věty: zbývající dvě strany a úhel jimi sevřený **(**tj. **úhel proti straně, která je na levé straně kosinové věty)**

Například:



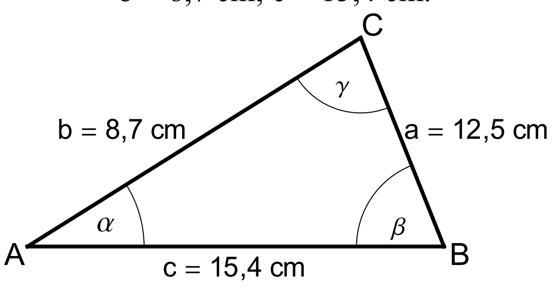
$$x^2 = z^2 + y^2 - 2\,z\,y \cdot \cos\beta$$

$$y^2 = x^2 + z^2 - 2\,x\,z \cdot \cos\alpha$$

$$z^2 = x^2 + y^2 - 2\,x\,y \cdot \cos\gamma$$

Vzorové příklady

1) Vypočítejte velikosti vnitřních úhlů trojúhelníku ABC, jehož délky stran jsou: a = 12,5 cm; b = 8,7 cm; c = 15,4 cm.



Nejprve spočítáme největší úhel v trojúhelníku, což je úhel proti největší straně, v našem případě úhel γ. Počítáme ho jako první proto, protože tento úhel může být ostrý i tupý a funkce cos to jednoznačně určí (cos je pro ostré úhly kladný, pro tupé záporný).

1) γ = ?

Sestavíme kosinovou větu s úhlem γ:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos\gamma$$

Teď pozor na to, že výraz $-2ab \cdot \cos\gamma$ obsahuje pouze násobení, proto ho musíme brát jako jeden člen (násobení má přednost před sčítáním).

$$2ab \cdot \cos\gamma = a^2 + b^2 - c^2 \quad / : 2ab$$

$$\cos\gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{12{,}5^2 + 8{,}7^2 - 15{,}4^2}{2 \cdot 12{,}5 \cdot 8{,}7} = -0{,}024$$

$$\gamma = 91{,}4°$$

Další úhly už můžeme vypočítat pomocí sinové věty, která je jednodušší.

2) α = ?

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\gamma} = \frac{a}{c} \quad / \cdot \sin\gamma$$

$$\sin\alpha = \sin\gamma \cdot \frac{a}{c}$$

$$\sin\alpha = 0{,}8114$$

$$\alpha = 54{,}2°$$

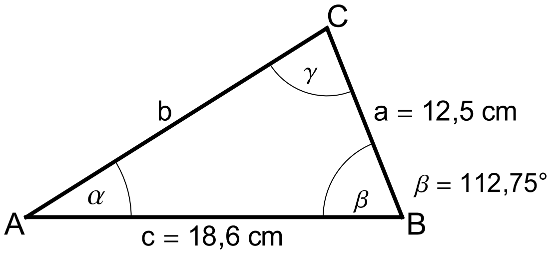
3) β = ?

$$\beta = 180° - \alpha - \gamma$$

$$\beta = 34{,}4°$$

---

2) V trojúhelníku ABC je dáno: β = 112,75°, a = 12,5 cm, c = 18,6 cm. Určete zbývající strany a úhly trojúhelníku.



Neznáme dvojici protilehlých prvků, proto musíme použít kosinovou větu. Známe úhel β, na levé straně kosinové věty bude proto strana b.

1) b = ?

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos\beta$$

$$b = \sqrt{a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos\beta}$$

$$b = \sqrt{12{,}5^2 + 18{,}6^2 - 2 \cdot 12{,}5 \cdot 18{,}6 \cdot \cos 112{,}75°}$$

$$b = 26{,}1\,cm$$

Teď už známe dvojici protilehlých prvků $\beta \leftrightarrow b$, proto můžeme použít k výpočtu dalších úhlů sinovou větu.

2) α = ?

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{a}{b} \quad / \cdot \sin\beta$$

$$\sin\alpha = \sin\beta \cdot \frac{a}{b}$$

$$\sin\alpha = 0,4417$$

$$\alpha = 26,2°$$

3) γ = ?

$$\gamma = 180° - \alpha - \beta$$

$$\gamma = 41,1°$$

Kdy použijeme sinovou větu a kdy kosinovou:

sinová věta: známe nebo můžeme určit (dopočítáním úhlu) dvojici protilehlých prvků (strana – úhel), tj. trojúhelník je určen pomocí věty Ssu nebo usu
kosinová věta: neznáme ani nemůžeme určit dvojici protilehlých prvků (strana – úhel), tj. trojúhelník je určen pomocí věty sss nebo sus