Lineární funkce

Příklady

1) Je dána funkce $f: y = 3x - 6$, určete souřadnice průsečíků grafu funkce *f* se souřadnicovými osami *x*, *y* a načrtněte její graf.

2) Je dána funkce $f: y = -2x + 2$, určete souřadnice průsečíků grafu funkce *f* se souřadnicovými osami *x*, *y* a načrtněte její graf.

3) Stanovte funkční rovnici lineární funkci *f*, pro kterou platí $f: y = ax - 4$ a graf funkce prochází bodem $[3; -2]$.

4) Stanovte lineární funkci *g*, pro kterou platí $g: y = -3x + b$ a graf funkce prochází bodem $[-4; 5]$.

5) Určete lineární funkci, jejíž graf prochází body $A[-5; 4]$ a $B[3; -2]$.

6) Stanovte funkční předpis lineární funkce *f*, pro kterou platí: $f(-2) = -4; f(3) = 8$.

7) Zjistěte, zda následující tabulka vyjadřuje **část** lineární funkce. Pokud ano, určete její funkční rovnici.

x	2	4	6	8	10
y	–10	–4	2	8	14

8) Zjistěte, zda následující tabulka vyjadřuje **část** lineární funkce. Pokud ano, určete její funkční rovnici.

x	5	10	15	20	25
y	40	30	20	10	0

9) Napište funkční rovnici přímé úměrnosti, jejíž graf prochází bodem $A[4; 7]$.

10) Je dána funkce $f: y = 4x - 3$. Načrtněte graf této funkce a určete, pro jaké hodnoty *x* jsou funkční hodnoty větší než 2.

11) Je dána funkce $f: y = 2x + 5$. Načrtněte graf této funkce a určete jaké jsou funkční hodnoty pro $x < -3$.

12) Je dána funkce $f: y = -2x + 3$. Načrtněte graf této funkce a určete, pro jaké hodnoty *x* jsou funkční hodnoty menší než 5.

13) Je dána funkce $f: y = -4x - 6$. Sestrojte graf této funkce a určete, jaké jsou funkční hodnoty pro $x < 2$.

14) Objem nádrže je 500 litrů a kohoutem přiteče za 1 min. 40 litrů vody. Před otevřením kohoutu bylo v nádrži 100 litrů vody. Popište závislost množství vody v nádrži na čase funkční rovnicí a grafem. Určete také definiční obor a obor funkčních hodnot

15) Napětí v elektrickém obvodu klesá rovnoměrně s časem. Na počátku pokusu bylo toto napětí 32 V, na konci pokusu 14,8 V, pokus trval 20 s. Popište závislost napětí na čase funkční rovnicí a grafem. Určete:
a) kdy napětí dosáhne hodnoty 22,5 V
b) jaká bude hodnota napětí v čase 12,8 s

16) Při odběru elektrické energie pro domácnost si může odběratel zvolit jednu ze dvou základních sazeb pro platbu:
sazba BS: 1,92 Kč za každou kWh + 6 Kč měsíční poplatek
sazba B: 1,10 Kč za každou kWh + 37 Kč měsíční poplatek.
Určete funkce *f* a *g* vyjadřující závislost měsíční platby na počtu spotřebovaných kWh při sazbě BS a při sazbě B. Určete, kdy je jaká sazba výhodnější.

17) Za připojení k počítačové síti si uživatel může zvolit jednu ze dvou poplatkových sazeb:
sazbu A: 95 Kč měsíční poplatek plus 6,20 Kč za každou hodinu provozu
sazbu B: 22 Kč měsíční poplatek plus 7,50 Kč za každou hodinu provozu.
Určete funkci popisující závislost měsíčního poplatku na počtu hodin provozu při jednotlivých sazbách. Určete, za jakých podmínek je výhodnější sazba A a za jakých sazba B.

18) Petr potřebuje natankovat. Buď může přímo v místě, kde stojí 1 litr benzínu 38,40 Kč nebo může zajet na Harta, kde stojí 1 litr benzínu 36,50 Kč, ale cesta tam a zpět ho přijde na 30 Kč. Sestavte funkce, které udávají závislost zaplacené sumy na počtu litrů pro nákup v místě a na Hartech. Určete, kdy je která varianta výhodnější.

Postup řešení

1) Je dána funkce $f: y = 3x - 6$, určete souřadnice průsečíků grafu funkce *f* se souřadnicovými osami *x*, *y* a načrtněte její graf.

Průsečík s osou *x* – do funkční rovnice dosadíme za *y* nulu a spočítáme *x*:

$0 = 3x - 6$

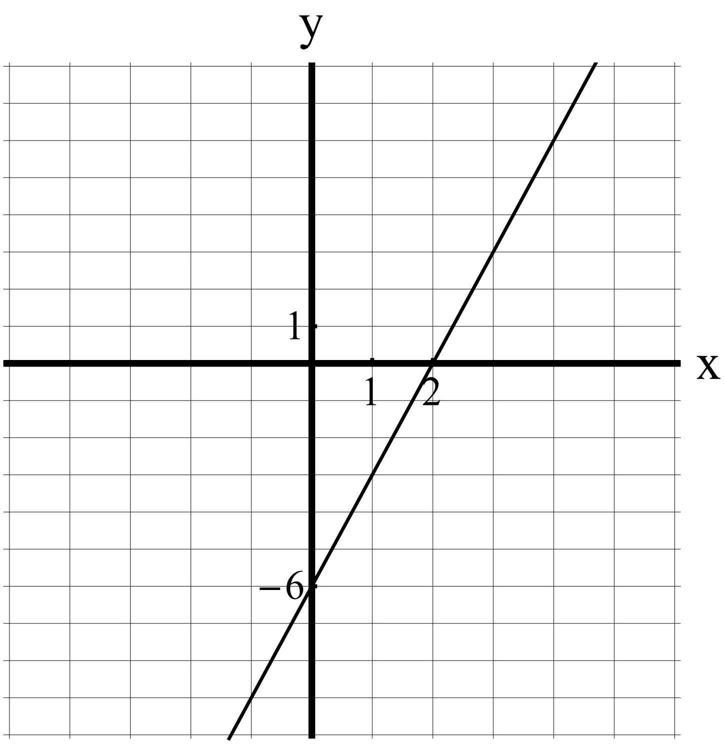
$x = 2$

Průsečíkem grafu funkce s osou *x* je bod $[2;0]$.

Průsečík s osou *y* – do funkční rovnice dosadíme za *x* nulu a spočítáme *y*:

$y = 3 \cdot 0 - 6 = -6$

Průsečíkem grafu funkce s osou *y* je bod $[0;-6]$.



2) Je dána funkce $f: y = -2x + 2$, určete souřadnice průsečíků grafu funkce *f* se souřadnicovými osami *x*, *y* a načrtněte její graf.

Průsečík s osou *x* – do funkční rovnice dosadíme za *y* nulu a spočítáme *x*:

$0 = -2x + 2$

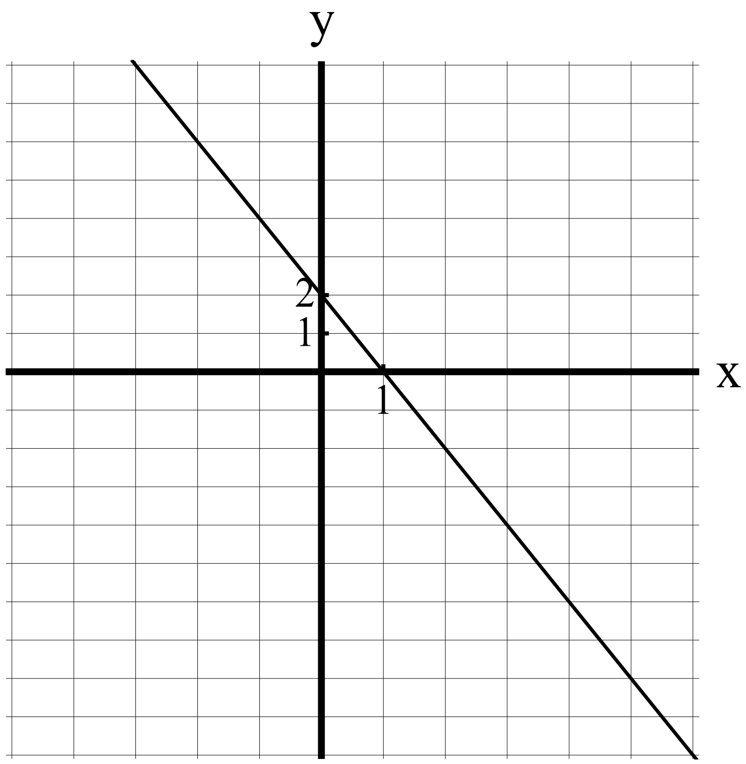
$x = 1$

Průsečíkem grafu funkce s osou *x* je bod $[1;0]$.

Průsečík s osou *y* – do funkční rovnice dosadíme za *x* nulu a spočítáme *y*:

$y = -2 \cdot 0 + 2 = 2$

Průsečíkem grafu funkce s osou *y* je bod $[0;2]$.



Průsečík s osou *x*: $[1;0]$, průsečík s osou *y*: $[0;2]$

3) Stanovte funkční rovnici lineární funkci *f*, pro kterou platí $f: y = ax - 4$ a graf funkce prochází bodem $[3;-2]$.

Do funkční rovnice $y = ax - 4$ dosadíme souřadnice bodu $[3;-2]$ a vypočítáme koeficient *a*:

$-2 = a \cdot 3 - 4$

$a = \frac{2}{3}$

Funkční rovnice je $y = \frac{2}{3}x - 4$

4) Stanovte lineární funkci *g*, pro kterou platí $g: y = -3x + b$ a graf funkce prochází bodem $[-4;5]$.

Do funkční rovnice $y = -3x + b$ dosadíme souřadnice bodu $[-4;5]$ a vypočítáme koeficient *b*:

$5 = -3 \cdot (-4) + b$

$b = -7$

Funkční rovnice je $y = -3x - 7$ **.**

5) Určete lineární funkci, jejíž graf prochází body $A[-5;4]$ a $B[3;-2]$.

Souřadnice daných bodů dosadíme do funkční rovnice lineární funkce $y = ax + b$, tím dostaneme soustavu dvou rovnic o dvou neznámých. Jejím řešením jsou koeficienty *a*, *b*.

$4 = a \cdot (-5) + b$

$\underline{-2 = a \cdot 3 + b}$

$-5a + b = 4 \ \ / \cdot (-1)$

$\underline{3a + b = -2}$

$5a - b = -4$

$\underline{3a + b = -2}$

$8a = -6$

$a = -\frac{3}{4}$

$b = 4 + 5a = 4 + 5 \cdot \left(-\frac{3}{4}\right) = \frac{1}{4}$

Funkční rovnice je $y = -\frac{3}{4}x + \frac{1}{4}$ **.**

6) Stanovte funkční předpis lineární funkce *f*, pro kterou platí: $f(-2)=-4; f(3)=8$.

Zápis $f(-2)=-4; f(3)=8$ znamená, že graf funkce prochází body $[-2;-4]$ a $[3;8]$.
Souřadnice těchto bodů dosadíme do funkční rovnice lineární funkce $y=ax+b$, tím dostaneme soustavu dvou rovnic o dvou neznámých. Jejím řešením jsou koeficienty *a*, *b*.

$-4=a\cdot(-2)+b$

$\underline{8=a\cdot 3+b}$

$-2a+b=-4 \quad /\cdot(-1)$

$\underline{3a+b=8}$

$2a-b=4$

$\underline{3a+b=8}$

$5a=12$

$a=\frac{12}{5}$

$b=8-3a=8-3\cdot\frac{12}{5}$

$b=\frac{4}{5}$

Funkční rovnice je $y=\frac{12}{5}x+\frac{4}{5}$ **.**

7) Zjistěte, zda následující tabulka vyjadřuje **část** lineární funkce. Pokud ano, určete její funkční rovnici.

x	2	4	6	8	10
y	–10	–4	2	8	14

Z tabulky vyčteme, že pokud se *x* zvětší o stejnou hodnotu (o 2), tak se *y* zvětší také o stejnou hodnotu (o 6) $\Rightarrow$ y se mění rovnoměrně $\Rightarrow$ lineární funkce.
Z tabulky dále vyčteme, že pokud by se *x* zvětšilo o 1, tak by se *y* zvětšilo o 3 $\Rightarrow a=3$
Koeficient *b* určíme dosazením libovolných hodnot z tabulky do funkční rovnice $y=3x+b$, např. $x=2; y=-10$:

$-10=3\cdot 2+b$

$b=-16$

Funkční rovnice je $y=3x-16$ **.**

8) Zjistěte, zda následující tabulka vyjadřuje **část** lineární funkce. Pokud ano, určete její funkční rovnici.

x	5	10	15	20	25
y	40	30	20	10	0

Z tabulky vyčteme, že pokud se *x* zvětší o stejnou hodnotu (o 5), tak se *y* zmenší také o stejnou hodnotu (o 10) $\Rightarrow$ y se mění rovnoměrně $\Rightarrow$ lineární funkce.

Z tabulky dále vyčteme, že pokud by se *x* zvětšilo o 1, tak by se *y* zmenšilo o 2 $\Rightarrow a = -2$

Koeficient *b* určíme dosazením libovolných hodnot z tabulky do funkční rovnice $y = -2x + b$, např. $x = 5; y = 40$:

$40 = -2 \cdot 5 + b$

$b = 50$

Funkční rovnice je $y = -2x + 50$.

9) Napište funkční rovnici přímé úměrnosti, jejíž graf prochází bodem $A[4;7]$.

Rovnice přímé úměrnosti je $y = ax$. Do rovnice dosadíme souřadnice daného bodu a určíme koeficient *a*:

$7 = 4a$

$a = \frac{7}{4}$

Funkční rovnice přímé úměrnosti je $y = \frac{7}{4}x$.

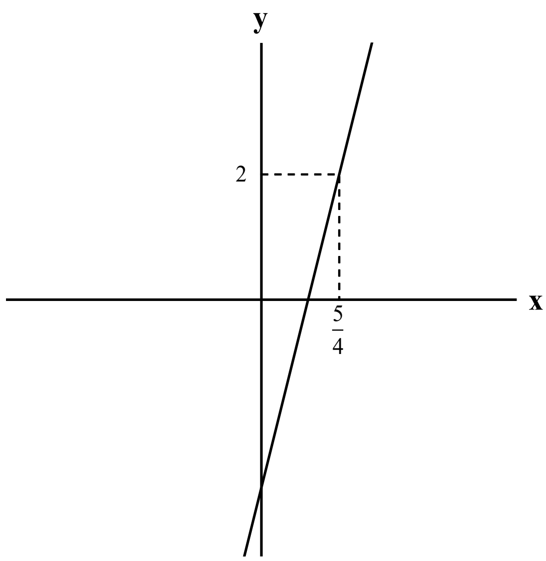
10) Je dána funkce $f: y = 4x - 3$. Načrtněte graf této funkce a určete, pro jaké hodnoty x jsou funkční hodnoty větší než 2.

Nejprve určíme, pro jakou hodnotu x je funkční hodnota rovna 2:

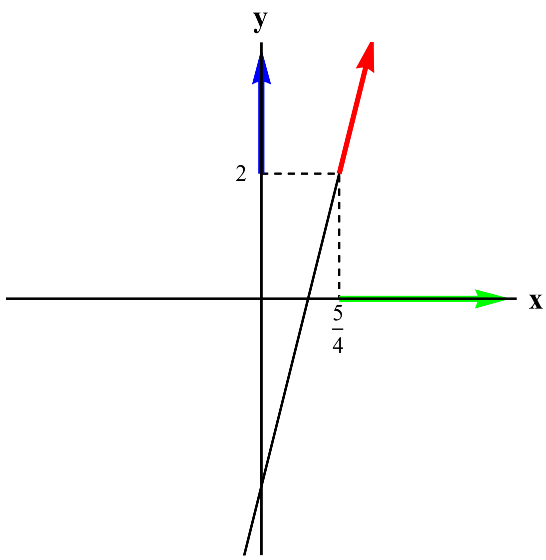
$$2 = 4x - 3$$

$$x = \frac{5}{4}$$

a načrtneme graf funkce.



Znázorníme hodnoty $y > 2$, zvýrazníme, která část grafu odpovídá této podmínce a zvýrazníme příslušné hodnoty x.



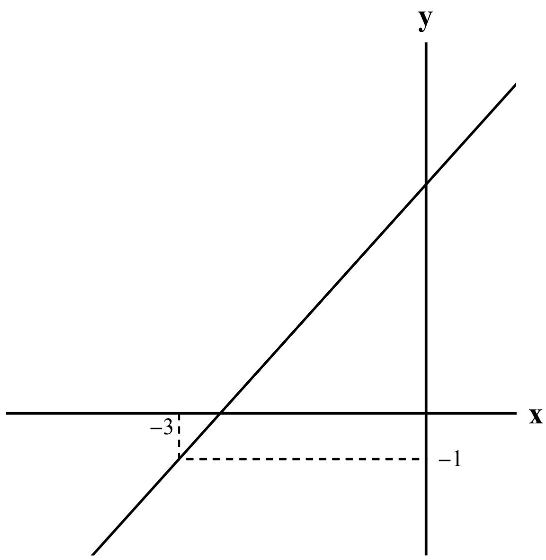
y je větší než 2 pro $x > \frac{5}{4}$**.**

11) Je dána funkce $f: y = 2x + 5$. Načrtněte graf této funkce a určete jaké jsou funkční hodnoty pro $x < -3$.

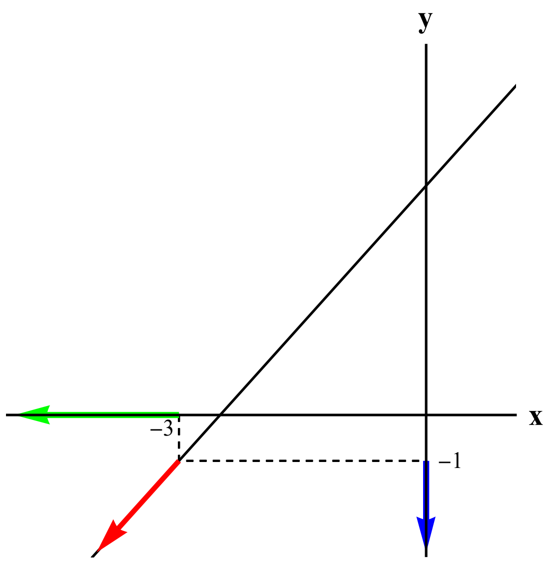
Nejprve určíme, jaká je hodnota y pro $x = -3$:

$y = 2 \cdot (-3) + 5 = -1$

a načrtneme graf funkce.



Znázorníme hodnoty $x < -3$, zvýrazníme, která část grafu odpovídá této podmínce a zvýrazníme příslušné hodnoty y.



Pro $x < -3$ y je $y < -1$.

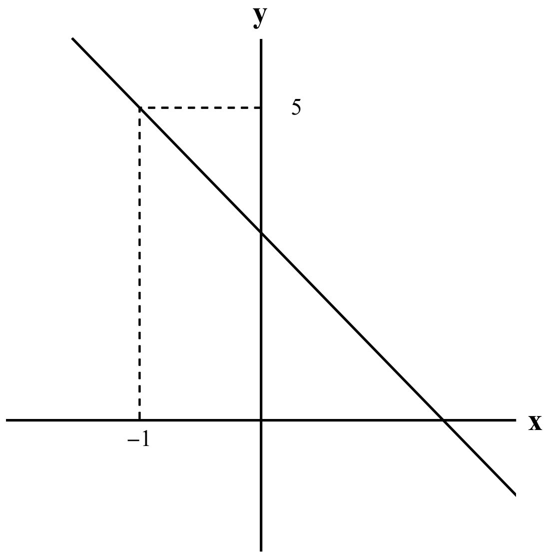
12) Je dána funkce $f:\ y=-2x+3$. Načrtněte graf této funkce a určete, pro jaké hodnoty x jsou funkční hodnoty menší než 5.

Nejprve určíme, pro jakou hodnotu x je funkční hodnota rovna 5:

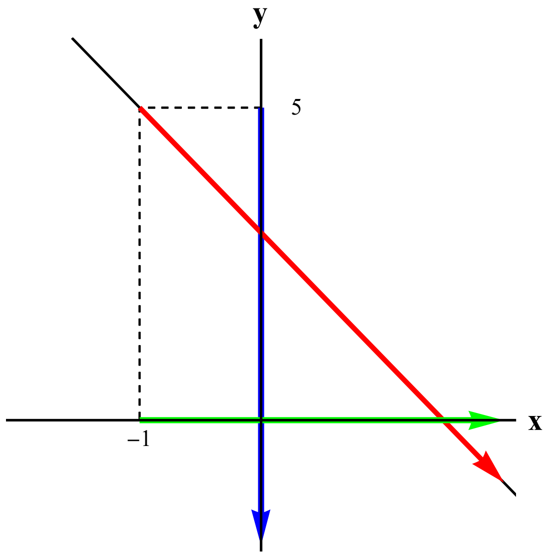
$5=-2x+3$

$x=-1$

a načrtneme graf funkce.



Znázorníme hodnoty $y<5$, zvýrazníme, která část grafu odpovídá této podmínce a zvýrazníme příslušné hodnoty x.



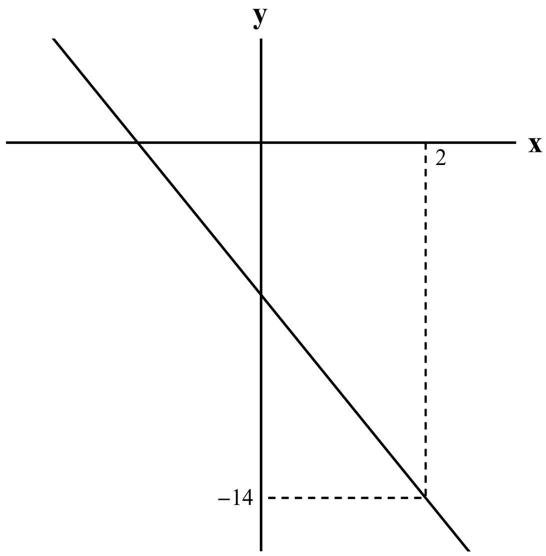
y je menší než 5 pro $x>-1$.

13) Je dána funkce $f: y = -4x - 6$. Sestrojte graf této funkce a určete, jaké jsou funkční hodnoty pro $x < 2$.

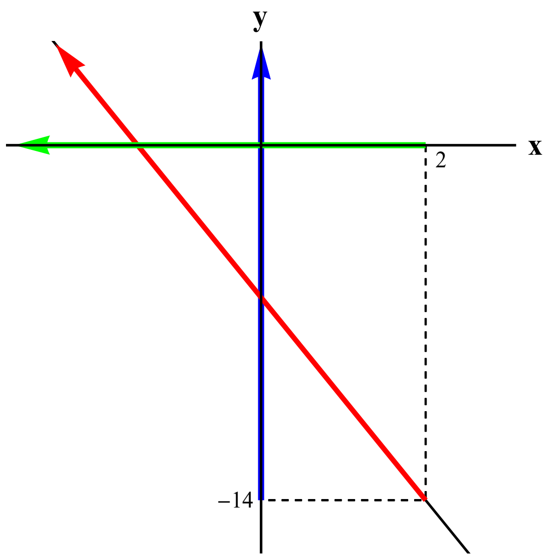
Nejprve určíme, jaká je hodnota y pro $x = 2$:

$y = -4 \cdot 2 - 6 = -14$

a načrtneme graf funkce.



Znázorníme hodnoty $x < 2$, zvýrazníme, která část grafu odpovídá této podmínce a zvýrazníme příslušné hodnoty y.



Pro $x < 2$ y je $y > -14$.

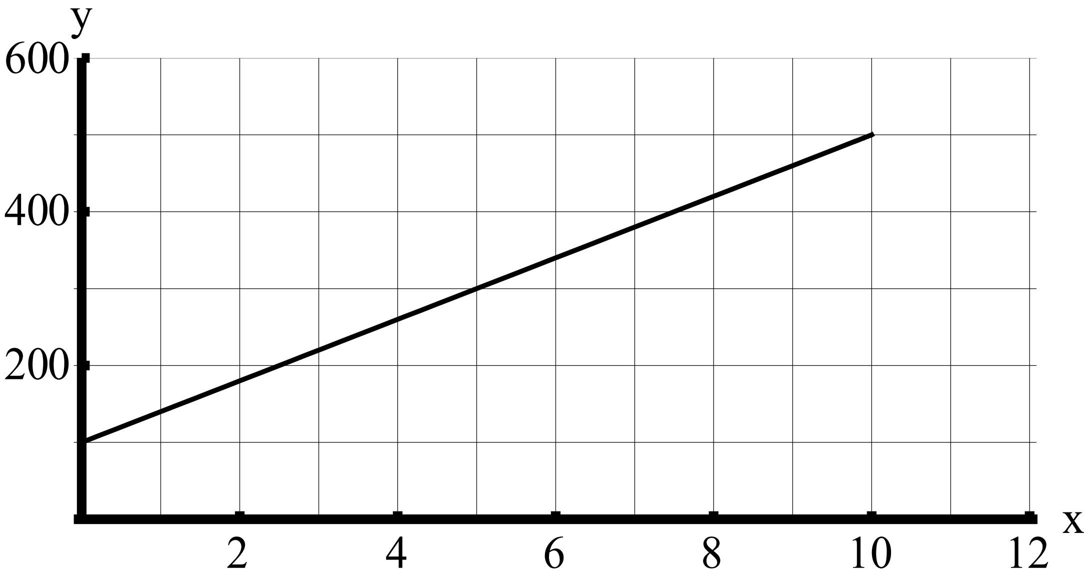
14) Objem nádrže je 500 litrů a kohoutem přiteče za 1 min. 40 litrů vody. Před otevřením kohoutu bylo v nádrži 100 litrů vody. Popište závislost množství vody v nádrži na čase funkční rovnicí a grafem. Určete také definiční obor a obor funkčních hodnot

x ….. čas v minutách

y….. objem vody v litrech

Funkční rovnice: $y = 40x + 100$

Graf:



Definiční obor: $x \in \langle 0;10 \rangle$

Obor hodnot: $y \in \langle 100;500 \rangle$

15) Napětí v elektrickém obvodu klesá rovnoměrně s časem. Na počátku pokusu bylo toto napětí 32 V, na konci pokusu 14,8 V, pokus trval 20 s. Popište závislost napětí na čase funkční rovnicí a grafem. Určete:

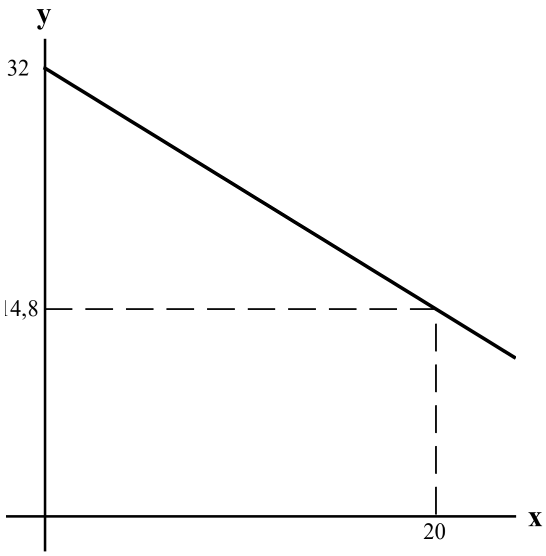
a) kdy napětí dosáhne hodnoty 22,5 V

b) jaká bude hodnota napětí v čase 12,8 s

x ….. čas v sekundách

y ….. napětí ve voltech

Graf:



Lineární funkce $y = ax + b$

Koeficient *a*: pokles napětí za 1 s, $|a| = \dfrac{32 - 14,8}{20} = 0,86,\ a = -0,86$

Koeficient *b*: y-ová souřadnice průsečíku grafu funkce s osou y, $b = 32$

Funkční rovnice: $y = -0,86x + 32$

a) kdy napětí dosáhne hodnoty 22,5 V

$22,5 = -0,86x + 32$

$x = 11,05$

Napětí dosáhne hodnoty 22,5 V za 11,05 s.

b) jaká bude hodnota napětí v čase 12,8 s

$y = -0,86 \cdot 12,5 + 32 = 21,25$

Hodnota napětí v čase 12,8 s bude 21,25 ***V*****.**

16) Při odběru elektrické energie pro domácnost si může odběratel zvolit jednu ze dvou základních sazeb pro platbu:
sazba BS: 1,92 Kč za každou kWh + 6 Kč měsíční poplatek
sazba B: 1,10 Kč za každou kWh + 37 Kč měsíční poplatek.
Určete funkce *f* a *g* vyjadřující závislost měsíční platby na počtu spotřebovaných kWh při sazbě BS a při sazbě B. Určete, kdy je jaká sazba výhodnější.

x ….. počet spotřebovaných kWh

y ….. měsíční platba v Kč

Sazba BS: $y = 1,92x + 6$

Sazba B: $y = 1,10x + 37$

$1,92x + 6 = 1,10x + 37$

$0,82x = 31$

$x = 37,8$

Sazba BS je výhodnější, pokud je počet spotřebovaných kWh menší než 37,8 kWh, pokud je počet spotřebovaných kWh větší než 37,8, tak je výhodnější sazba B.

17) Za připojení k počítačové síti si uživatel může zvolit jednu ze dvou poplatkových sazeb:
sazbu A: 95 Kč měsíční poplatek plus 6,20 Kč za každou hodinu provozu
sazbu B: 22 Kč měsíční poplatek plus 7,50 Kč za každou hodinu provozu.
Určete funkci popisující závislost měsíčního poplatku na počtu hodin provozu při jednotlivých sazbách. Určete, za jakých podmínek je výhodnější sazba A a za jakých sazba B.

x ….. počet hodin provozu

y ….. měsíční polatek v Kč

Sazba A: $y = 6,2x + 95$

Sazba B: $y = 7,5x + 22$

$6,2x + 95 = 7,5x + 22$

$1,3x = 73$

$x = 56,2$

Sazba A je výhodnější, pokud jsme připojeni k síti delší dobu než 56,2 hodin, pokud jsme připojeni k síti méně než 56,2 hodin, tak je výhodnější sazba B.

18) Petr potřebuje natankovat. Buď může přímo v místě, kde stojí 1 litr benzínu 38,40 Kč nebo může zajet na Harta, kde stojí 1 litr benzínu 36,50 Kč, ale cesta tam a zpět ho přijde na 30 Kč. Sestavte funkce, které udávají závislost zaplacené sumy na počtu litrů pro nákup v místě a na Hartech. Určete, kdy je která varianta výhodnější.

x ….. počet natankovaných litrů

y ….. zaplacená částka v Kč

v místě: $y = 38,4x$

na Hartech: $y = 36,5x + 30$

$38,4x = 36,5x + 30$

$x = 15,8$

Tankování na Hartech je výhodnější, pokud tankujeme více než 16 litrů