Exponenciální funkce

Exponenciální funkce o základu *a* je funkce určená funkční rovnicí

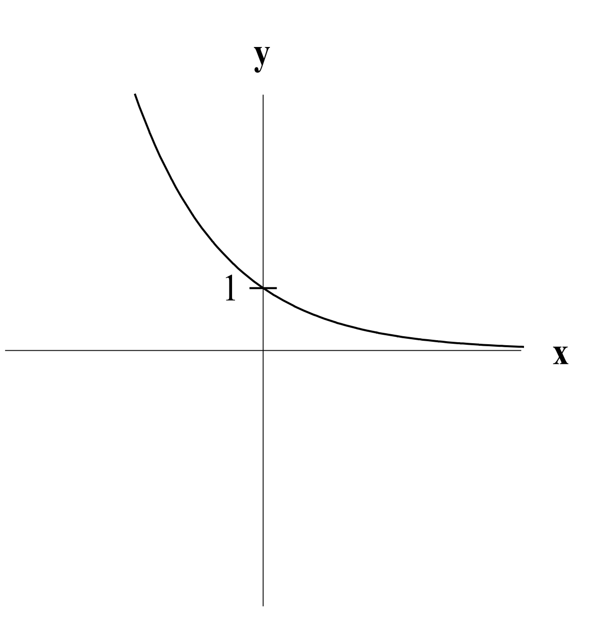
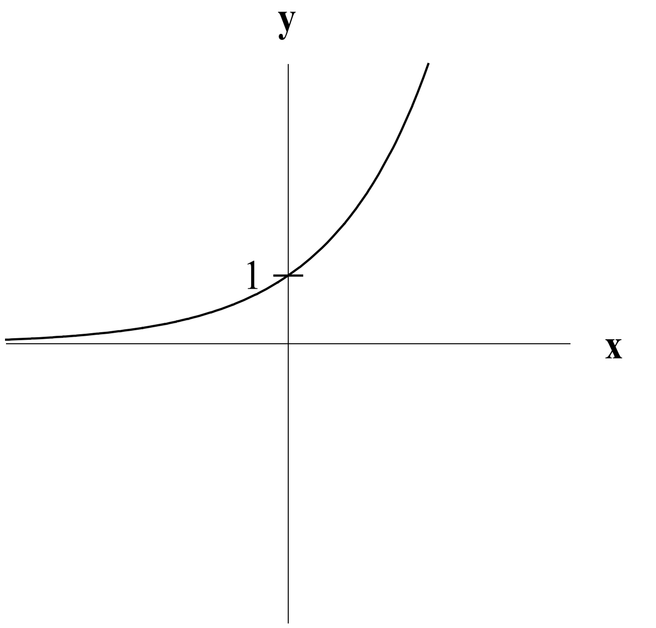
$y = a^x \qquad x \in R$

$\qquad\qquad a \in (0;1) \cup (1;\infty)$

Například

$y = 3^x \qquad y = 0{,}5^x \qquad y = \left(\frac{2}{3}\right)^x$

Graf exponenciální funkce

$a \in (0;\,1)$	$a \in (1;\,\infty)$
	

Grafem exponenciální funkce je exponenciální křivka

Základní vlastnosti exponenciální funkce

Obor funkčních hodnot exponenciální funkce je (0, ∞).
Exponenciální funkce je pro:

- ☞ $a \in (1;\,\infty)$ rostoucí
- ☞ $a \in (0;\,1)$ klesající

Graf každé exponenciální funkce prochází bodem [0, 1].

Význam exponenciální funkce $y = a^x$

Pro exponenciální funkci $y = a^x$ platí: pokud se x zvětší o 1, tak se y změní $a - krát$.

Zdůvodnění

$y_1 = a^{x_1}$

$y_2 = a^{x_2}$

$\frac{y_2}{y_1} = \frac{a^{x_2}}{a^{x_1}} = a^{x_2 - x_1}$

$x_2 - x_1 = 1 \Rightarrow \frac{y_2}{y_1} = a$

$y_2 = a \cdot y_1$

To znamená:

$a \in (1;\infty)$ - y roste

$a \in (0;1)$ - y klesá.

Například

$y = 2^x$: při zvýšení x o 1, bude y 2–krát větší

$y = 5^x$: při zvýšení x o 1, bude y 5–krát větší

$y = 0,25^x$: při zvýšení x o 1, bude y 4–krát menší $\left(0,25 = \frac{1}{4}\right)$

$y = 0,5^x$: při zvýšení x o 1, bude y 2–krát menší $\left(0,5 = \frac{1}{2}\right)$

Souvislost exponenciální funkce s procenty

Hodnota veličiny x se zvětší o p% – jak to nejsnáze spočítat?

Například: zvětšete číslo 10 000 o 8%.

Počítáme vlastně 108% původního čísla (přes 1%):

$$\frac{10000}{100}\cdot 108 = 10000\cdot\frac{108}{100} = 10000\cdot 1{,}08$$

Další příklady

původní hodnota	**změna**	**cílová hodnota**	**výpočet**
x	zvětšení o 4 %	104 % z x	$1{,}04\cdot x$
x	zvětšení o 15 %	115 % z x	$1{,}15\cdot x$
x	zvětšení o 53,2 %	153,2 % z x	$1{,}532\cdot x$
x	zvětšení o 0,25 %	100,25 % z x	$1{,}0025\cdot x$

Nejjednodušší způsob, jak danou hodnotu zvětšit o p%, je násobit ji vhodným číslem. V čísle, kterým násobíme, jsou procenta „ukryta“ na místě setin.

Např. když násobíme číslem 1,075, tak zvětšujeme **na** 107,5% původní hodnoty, tj, **o** 7,5% původní hodnoty.

Hodnota veličiny x se zmenší o p% – jak to nejsnáze spočítat?

Například: zmenšete číslo 10 000 o 6%. Počítáme vlastně 94% původního čísla (přes 1%):

$$\frac{10000}{100}\cdot 94 = 10000\cdot\frac{94}{100} = 10000\cdot 0{,}94$$

Další příklady

původní hodnota	**změna**	**cílová hodnota**	**výpočet**
x	zmenšení o 15%	85 % z x	$0{,}85\cdot x$
x	zmenšení o 8 %	92 % z x	$0{,}92\cdot x$
x	zmenšení o 53,2 %	46,8 % z x	$0{,}468\cdot x$
x	zmenšení o 3,8 %	96,2 % z x	$0{,}962\cdot x$

Nejjednodušší způsob, jak danou hodnotu zmenšit o p%, je násobit ji vhodným číslem.V čísle, kterým násobíme, jsou procenta „ukryta“ na místě setin.

Např. když násobíme číslem 0,925, tak zmenšujeme **na** 92,5% původní hodnoty, tj. **o** 7,5% původní hodnoty.

Shrnutí

Protože pro exponenciální funkci $y = a^x$ platí: pokud se x zvětší o 1, tak se y změní $a - krát$, tak to můžeme interpretovat také následovně.

Pro exponenciální funkci $y = a^x$ platí: pokud se x zvětší o 1, tak se y změní o *p*%. Počet % *p* souvisí se základem exp. funkce *a*.

Například

$y = 1{,}05^x$	jestliže se x zvětší o 1, pak se y zvětší o 5%
$y = 1{,}22^x$	jestliže se x zvětší o 1, pak se y zvětší o 22%
$y = 0{,}93^x$	jestliže se x zvětší o 1, pak se y zmenší o 7%
$y = 0{,}043^x$	jestliže se x zvětší o 1, pak se y zmenší o 95,7%

Význam exponenciální funkce $y = k \cdot a^x$

Pro exponenciální funkci $y = k \cdot a^x$ platí stejně jako pro funkci $y = a^x$: pokud se x zvětší o 1, tak se y změní $a - krát$.

Zdůvodnění

$y_1 = k \cdot a^{x_1}$

$y_2 = k \cdot a^{x_2}$

$$\frac{y_2}{y_1} = \frac{k \cdot a^{x_2}}{k \cdot a^{x_1}} = \frac{a^{x_2}}{a^{x_1}} = a^{x_2 - x_1}$$

$$x_2 - x_1 = 1 \Rightarrow \frac{y_2}{y_1} = a$$

$y_2 = a \cdot y_1$

Stejná je proto i souvislost s procenty.

Pro exponenciální funkci $y = k \cdot a^x$ platí: pokud se x zvětší o 1, tak se y změní o *p*%. Počet % *p* souvisí se základem exp. funkce *a*.

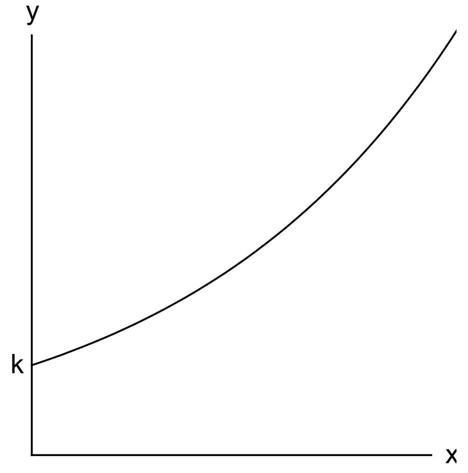
Nejdůležitějším případem exponenciální funkce je funkce $y = k \cdot a^x$ s definičním oborem $x \in \langle 0; +\infty)$

Tato exponenciální funkce popisuje případy, kdy se daná veličina zvětšuje nebo zmenšuje o p% při zvětšení hodnoty *x* o 1 (pokud proměnná *x* znamená např. roky, tak za 1 rok).
Tato funkce velmi často popisuje děje v přírodě i ve společnosti.

k „počáteční hodnota“, přesněji hodnota *y* pro $x = 0$

Exponenciální růst

Pro $a \in (1; +\infty)$



Například

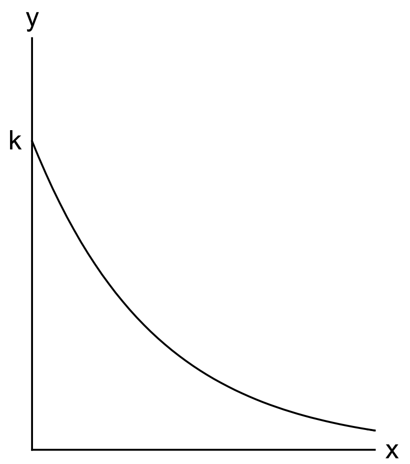
$y = 10\,000 \cdot 1{,}025^x$ město má 10000 obyvatel, roční přírůstek je 2,5%

$y = 25\,000 \cdot 1{,}085^x$ v lese je 25 000 m^3 dřeva, ročně naroste navíc 8,5%

$y = 100\,000 \cdot 1{,}035^x$ do banky uložíme 100 000 Kč s ročním úrokem 3,5% (nepočítáme daň z úroků)

Exponenciální pokles

Pro $a \in (0; 1)$



Například

$y = 5600 \cdot 0{,}97^x$ vesnice má 5600 obyvatel, ročně ubývají 3%

$y = 1500000 \cdot 0{,}89^x$ cena stroje byla 1 500 000 Kč, ročně se odepisuje 11%