7. Inverzní funkce

Podstatou každé funkce je, že zvoleným hodnotám x přiřazuje hodnoty y. Toto přiřazení můžeme vyjádřit funkční rovnicí, tabulkou nebo grafem.

Příklad
Funkce $f: y = 2x + 3$ přiřazuje např. nule trojku, mínus pětce mínus sedmičku atd. – viz tabulka:

x	0	–5	2	4	atd.
y	3	–7	7	11	atd.

Inverzní funkce k funkci f je funkce, která bude přiřazení dělat přesně opačně: trojce nulu, mínus sedmičce mínus pětku atd.:

x	3	–7	7	11	atd.
y	0	–5	2	4	atd.

Inverzní funkce se označuje f^{-1} a teď je otázka, jak určit její funkční rovnici.

Protože u inverzní funkce jsou stejné dvojice čísel, ale v převráceném (inverzním) pořadí (místo $[0;3]$ je $[3;0]$, místo $[-5;-7]$ je $[-7;-5]$ atd.), tak s funkční rovnicí to uděláme stejně – přehodíme x a y:

původní funkce: $f: y = 2x + 3$
inverzní funkce: $f^{-1}: x = 2y + 3$

Protože ale každá funkce je určena rovnicí „y = něčemu“ a ne „x = něčemu“, tak funkční rovnici upravíme:

$$x = 2y + 3$$

$$x - 3 = 2y \quad / : 2$$

$$\frac{x-3}{2} = y$$

$$y = \frac{x-3}{2}$$

Závěr: k funkci $f: y = 2x + 3$ je inverzní funkcí $f^{-1}: y = \frac{x-3}{2}$ nebo-li obě tyto funkce jsou navzájem inverzní.

Můžeme si to ověřit tabulkou:
$f: y = 2x + 3$

x	0	–5	2	4	atd.
y	3	–7	7	11	atd.

$f^{-1}: y = \frac{x-3}{2}$

x	3	–7	7	11	atd.
y	0	–5	2	4	atd.

Důležité příklady inverzních funkcí

1) Druhá mocnina, druhá odmocnina

$f:\ y = x^2$ přiřazuje: $1 \to 1,\ 2 \to 4,\ 3 \to 9,\ 4 \to 16,\ 2{,}56 \to 6{,}5536$ atd.

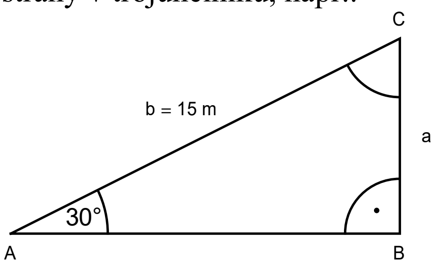
$f^{-1}:\ y = \sqrt{x}$ přiřazuje $1 \to 1,\ 4 \to 2,\ 9 \to 3,\ 16 \to 4,\ 6{,}5536 \to 2{,}56$ atd.

Např. pokud známe stranu čtverce a počítáme obsah, používáme funkci $f:\ y = x^2$ ($S = a^2$).

Pokud známe obsah a počítáme stranu, používáme funkci inverzní $f^{-1}:$ $y = \sqrt{x}$ ($a = \sqrt{S}$)

2) $\sin$, $\sin^{-1}$

Funkce $y = \sin x$ přiřazuje dané velikosti úhlu číslo, např. $\sin 30° = 0{,}5$. Toto můžeme použít pro výpočet strany v trojúhelníku, např.:

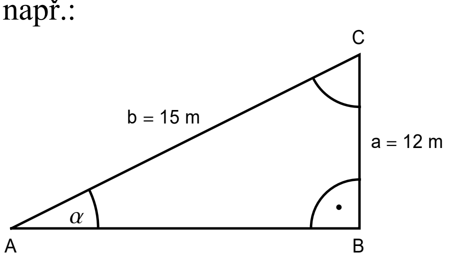


$$\sin 30° = \frac{a}{15}$$

$$a = 15 \cdot \sin 30° = 7{,}5\,m$$

Tady jsme použili funkci $y = \sin x$, na kalkulačce tlačítko sin.

Často ale potřebujeme převrácený (inverzní) postup – známe strany a potřebujeme zjistit velikost úhlu, např.:



$$\sin\alpha = \frac{12}{15}$$

$$\sin\alpha = 0{,}8$$

$$\alpha = 53{,}13°$$

Tady jsme použili funkci, která se v matematice označuje $y = \arcsin x$, na kalkulačce má označení $\sin^{-1}$.

Funkce $y = \sin x$ a $y = \arcsin x$ jsou funkce inverzní.

Další „inverzní tlačítka“ na kalkulačce: $\cos,\ \cos^{-1}$; $\tan,\ \tan^{-1}$; $x^n,\ \sqrt[n]{x}$

Pro inverzní funkce platí:
definiční obor funkce = obor funkčních hodnot funkce k ní inverzní
obor funkčních hodnot funkce = definiční obor funkce k ní inverzní

Zdůvodnění

Protože se u inverzní funkce převrací *x* a *y*, tak se převrací i příslušné množiny.

Např.:

$f:\ y = \sin x,\ x \in \langle 0°, 90° \rangle,\ y \in \langle 0, 1 \rangle$

$f^{-1}:\ y = \arcsin x,\ x \in \langle 0, 1 \rangle,\ y \in \langle 0°, 90° \rangle$