

Logaritmická funkce

Logaritmická funkce o základu a je funkce inverzní k exponenciální funkci o stejném základu a .

Zápis

$$y = \log_a x \quad x \in (0; \infty)$$
$$a \in (0; 1) \cup (1; \infty)$$

Například:

$$y = \log_5 x \quad y = \log_{0,2} x \quad y = \log_{10} x$$

Zápis $y = \log_a x$ čteme: y se rovná logaritmus x o základu a .

Např.: $y = \log_2 x$ čteme: y se rovná logaritmus x o základu 2

Na kalkulačce jsou pro logaritmus 2 tlačítka:

$\log \square$ – zde je možné vložit i základ logaritmu, např. $\log_2 5 = 2,321928095$

\log – toto tlačítko počítá logaritmus čísla o základu 10, např. $\log 5 = \log_{10} 5 = 0,6989700043$

Vzhledem k tomu, že logaritmická funkce je inverzní k exponenciální funkci, tak platí:

Zápis $x = a^y$ je ekvivalentní se zápisem $y = \log_a x$

Tj. když se nám to hodí, tak:

☞ místo $y = \log_a x$ můžeme napsat $x = a^y$

☞ místo $x = a^y$ můžeme napsat $y = \log_a x$

Základní příklad

Řešte rovnici $2 = 1,09^x$

Rovnice $2 = 1,09^x$ je rovnice typu $x = a^y$ a tu můžeme převést na $y = \log_a x$

$$2 = 1,09^x$$



$$x = a^y \quad \Leftrightarrow \quad y = \log_a x$$

↓

$$x = \log_{1,09} 2$$

$$x = \log_{1,09} 2 \doteq 8,043231727$$

$$\text{Ověření } 1,09^{8,043231727} = 2$$

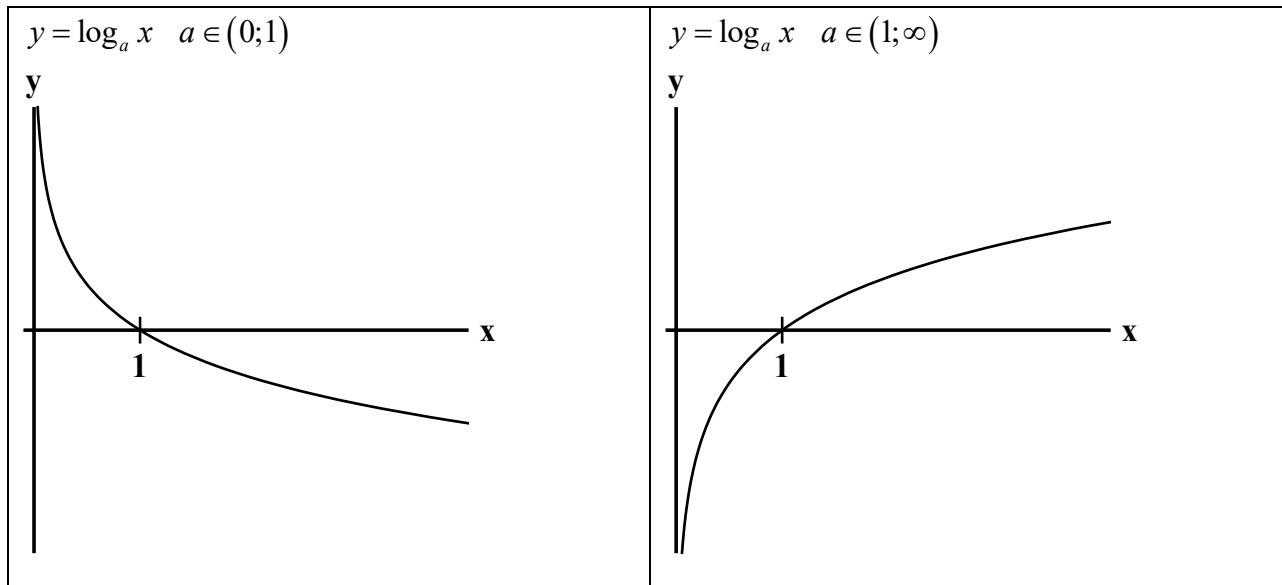
Řešení rovnic typu $5 = 3^x$

Když známe výsledek mocniny o daném základu a počítáme mocnitele, tak musíme použít logaritmus výsledku o daném základu nebo-li:

$$\text{mocnitel} = \log_{\text{základ mocniny}} \text{výsledek mocniny}$$

Řešením rovnice $5 = 3^x$ je tedy $x = \log_3 5$.

Graf logaritmické funkce



Obory logaritmické funkce

Protože logaritmická funkce a exponenciální funkce jsou funkce navzájem inverzní, tak definiční obor jedné funkce je stejný jako obor hodnot druhé funkce a naopak. Tedy:

exponenciální funkce $y = a^x$	definiční obor: $x \in (-\infty; \infty)$ obor funkčních hodnot: $y \in (0; \infty)$
logaritmická funkce $y = \log_a x$	definiční obor: $x \in (0; \infty)$ obor funkčních hodnot: $y \in (-\infty; \infty)$

Funkční hodnota logaritmické funkce (zkráceně logaritmus) existuje pouze pro kladná čísla.

Nejdůležitější logaritmické funkce

$y = \log_{10} x$ dekadický (desítkový) logaritmus, značí se $\log x$

$y = \log_e x$ přirozený logaritmus, značí se $\ln x$

Eulerovo číslo $e = 2,71828\dots$

Věty o logaritmech

1) Logaritmus součinu dvou kladných čísel je roven součtu logaritmů jednotlivých činitelů.
$$\log_a(x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$$

2) Logaritmus podílu kladných čísel je roven rozdílu logaritmů dělence a dělitele.
$$\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$$

3) Logaritmus mocniny kladného čísla je roven součinu exponentu a logaritmu základu mocniny.
$$\log_a x^n = n \cdot \log_a x$$