Exponenciální a logaritmické funkce – příklady

Zadání

1) $5 = 2^k$, určete hodnotu *k*.

2) $3 = 0{,}4^y$, určete hodnotu *y*.

3) $0{,}8 = 1{,}2^x$, určete hodnotu *x*.

4) $\log_{0,5} x = 2$, určete hodnotu *x*.

5) $\log_3 x = -4$, určete hodnotu *x*.

6) $\log_4 x = \frac{1}{2}$, určete hodnotu *x*.

7) $\log_a 4 = -2$, určete hodnotu *a*.

8) $\log_a 36 = 2$, určete hodnotu *a*.

9) $\log_a 7 = \frac{1}{2}$, určete hodnotu *a*.

10) Určete definiční obor logaritmické funkce $y = \log_2(5 - 2x)$.

11) Určete definiční obor logaritmické funkce $y = \log_{0,4}(4x - 10)$.

12) Je dána funkce f: $y = 0{,}9^x$. Načrtněte graf a určete, pro která *x* je funkční hodnota rovna 1,7.

13) Je dána funkce *f*: $y = 3{,}5^x$. Načrtněte graf a určete všechna $x \in D(f)$, pro něž platí *f(x)* = 2,5.

14) Je dána funkce *f*: $y = \log_4 x$. Načrtněte graf a určete, pro která *x* je funkční hodnota rovna – 0,5.

15) Je dána funkce *f*: $y = \log_{0,7} x$. Načrtněte graf a určete všechna $x \in D(f)$, pro něž platí *f(x)* = 3.

16) Graf funkce s předpisem $y = \log_a x$ prochází bodem $P = \left[2; \frac{1}{3}\right]$. Určete hodnotu základu *a*.

17) Dopočtěte chybějící souřadnici bodu $B = [x;\ 32]$ grafu funkce *f* dané předpisem: $f:\ y = 0{,}5^x$

18) Dopočtěte chybějící souřadnici bodu $A = [x;\ -3]$ grafu funkce *f* dané předpisem: $f:\ y = \log_4 x$

19) Graf funkce s předpisem $y = a^x$ prochází body $A[-2;\ 9]$ a $B[b_1; 27]$. Doplňte chybějící souřadnici b_1 bodu *B*.

20) Město R má 63 810 obyvatel, budeme předpokládat, že počet obyvatel se bude v následujících letech pravidelně zvyšovat o 2,8 %.

- **a)** Určete, kolik by mělo město obyvatel za 8 let.
- **b)** Po kolika letech by se počet obyvatel zvýšil na 90 000?

21) Počáteční množství dřeva v lese bylo odhadnuto na 32 500 m^3 a jeho průměrný roční úbytek na 5,2 %.

- **a)** Kolik m^3 dřeva by bylo v lese bez těžby a výsadby za 5 let?
- **b)** Za jak dlouho by se původní množství dřeva (bez těžby a výsadby) snížilo na 20 000 m^3?

Řešení

1) $5 = 2^k$, určete hodnotu k.

Viz Teorie: mocnitel = $\log_{\text{základ mocniny}}$výsledek mocniny

$k = \log_2 5 \doteq 2,3219$

---

2) $3 = 0,4^y$, určete hodnotu y.

Viz Teorie: mocnitel = $\log_{\text{základ mocniny}}$výsledek mocniny

$y = \log_{0,4} 3 \doteq -1,1990$

---

3) $0,8 = 1,2^x$, určete hodnotu x.

Viz Teorie: mocnitel = $\log_{\text{základ mocniny}}$výsledek mocniny

$x = \log_{1,2} 0,8 \doteq -1,2240$

---

4) $\log_{0,5} x = 2$, určete hodnotu x.

Použijeme pravidlo „místo $y = \log_a x$ můžeme napsat $x = a^y$“:

$x = 0,5^2 = 0,25$

---

5) $\log_3 x = -4$, určete hodnotu x.

Použijeme pravidlo „místo $y = \log_a x$ můžeme napsat $x = a^y$“:

$x = 3^{-4} = \frac{1}{81}$

---

6) $\log_4 x = \frac{1}{2}$, určete hodnotu x.

Použijeme pravidlo „místo $y = \log_a x$ můžeme napsat $x = a^y$“:

$x = 4^{\frac{1}{2}} = 2$

---

7) $\log_a 4 = -2$, určete hodnotu a.

Použijeme pravidlo „místo $y = \log_a x$ můžeme napsat $x = a^y$“:

$4 = a^{-2}$

$4 = \frac{1}{a^2} \quad / \cdot a^2$

$4a^2 = 1$

$a^2 = \frac{1}{4}$

$a = \pm\sqrt{\frac{1}{4}}$ základ nesmí být záporný

$a = \frac{1}{2}$

---

8) $\log_a 36 = 2$, určete hodnotu *a*.

Použijeme pravidlo „místo $y = \log_a x$ můžeme napsat $x = a^y$“:

$36 = a^2$

$a = 6$

---

9) $\log_a 7 = \frac{1}{2}$, určete hodnotu *a*.

Použijeme pravidlo „místo $y = \log_a x$ můžeme napsat $x = a^y$“:

$7 = a^{\frac{1}{2}}$

$7 = \sqrt{a}$

$a = 49$

---

10) Určete definiční obor logaritmické funkce $y = \log_2(5-2x)$

Logaritmická funkce existuje pouze pro kladná čísla, proto výraz za log musí být kladný:

$5 - 2x > 0$

$-2x > -5 \ \ / : (-2)$

$x < \frac{5}{2}$ dělíme záporným číslem $\Rightarrow$ obrací se znak nerovnosti

$x \in \left(-\infty; \frac{5}{2}\right)$

Definiční obor funkce $y = \log_2(5-2x)$ **je** $x \in \left(-\infty; \frac{5}{2}\right)$

---

11) Určete definiční obor logaritmické funkce $y = \log_{0,4}(4x-10)$.

$4x - 10 > 0$

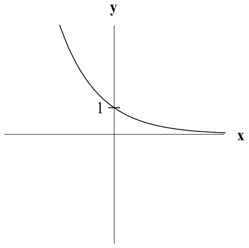
$4x > 10 \ \ / : 4$

$x > \frac{5}{2}$

Definiční obor funkce $y = \log_{0,4}(4x-10)$ **je** $x \in \left(\frac{5}{2}; \infty\right)$

---

12) Je dána funkce f: $y = 0,9^x$. Načrtněte graf a určete, pro která *x* je funkční hodnota rovna 1,7.



$1,7 = 0,9^x$

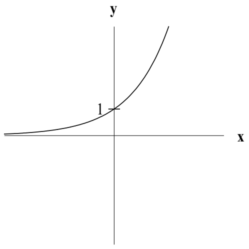
$x = \log_{0,9} 1,7$

$x \doteq -5,04$

Funkční hodnota je rovna 1,7 pro $x \doteq -5,04$.

---

13) Je dána funkce *f*: $y = 3,5^x$. Načrtněte graf a určete všechna $x \in D(f)$, pro něž platí *f(x)* = 2,5.



$2,5 = 3,5^x$

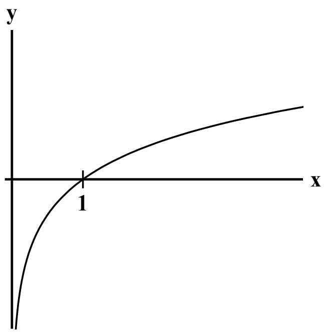
$x = \log_{3,5} 2,5$

$x \doteq 0,73$

***f(x)* = 2,5 pro $x \doteq 0,73$.**

---

14) Je dána funkce *f*: $y = \log_4 x$. Načrtněte graf a určete, pro která *x* je funkční hodnota rovna – 0,5.



$-0,5 = \log_4 x$

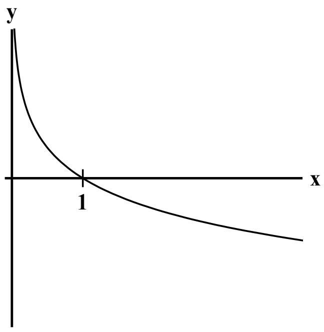
$x = 4^{-0,5}$

$x = \frac{1}{2}$

Funkční hodnota je rovna – 0,5 pro $x = \frac{1}{2}$.

---

15) Je dána funkce *f*: $y = \log_{0,7} x$. Načrtněte graf a určete všechna $x \in D(f)$, pro něž platí *f(x)* = 3.



$3 = \log_{0,7} x$

$x = 0,7^3$

$x = 0,343$

***f(x)* = 3 pro** $x = 0,343$**.**

---

16) Graf funkce s předpisem $y = \log_a x$ prochází bodem $P = \left[2; \frac{1}{3}\right]$. Určete hodnotu základu *a*.

$y = \log_a x$

$\frac{1}{3} = \log_a 2$

$2 = a^{\frac{1}{3}}$

$2 = \sqrt[3]{a} \quad /^3$

$a = 8$

Základ logaritmu *a* = 8.

---

17) Dopočtěte chybějící souřadnici bodu $B = [x; 32]$ grafu funkce *f* dané předpisem: $f: y = 0,5^x$

$f: y = 0,5^x$

$32 = 0,5^x$

$x = \log_{0,5} 32$

$x = -5$

Chybějící souřadnice *x* = – 5.

---

18) Dopočtěte chybějící souřadnici bodu $A=[x;\,-3]$ grafu funkce *f* dané předpisem:

$f:\ y=\log_4 x$

$f:\ y=\log_4 x$

$-3=\log_4 x$

$x=4^{-3}$

$x=\dfrac{1}{64}$

Chybějící souřadnice $x=\dfrac{1}{64}$**.**

---

19) Graf funkce s předpisem $y=a^x$ prochází body $A[-2;\,9]$ a $B[b_1;27]$. Doplňte chybějící souřadnici b_1 bodu *B*.

Nejprve určíme hodnotu základu exponenciální funkce.

$y=a^x$

$A[-2;\,9]:\ 9=a^{-2}$

$9=\dfrac{1}{a^2}\ \ /\cdot a^2$

$9a^2=1\ \ /:9$

$a^2=\dfrac{1}{9}$ tato kvadratická rovnice má dvě řešení $\pm\dfrac{1}{3}$, základ ale nemůže být záporný

$a=+\sqrt{\dfrac{1}{9}}=\dfrac{1}{3}$

Teď určíme chybějící souřadnici.

$y=\left(\dfrac{1}{3}\right)^x$

$27=\left(\dfrac{1}{3}\right)^x$

$x=\log_{\frac{1}{3}} 27$

$x=-3$

Chybějící souřadnice $b_1=-3$**.**

---

20) Město R má 63 810 obyvatel, budeme předpokládat, že počet obyvatel se bude v následujících letech pravidelně zvyšovat o 2,8 %.

a) Určete, kolik by mělo město obyvatel za 8 let.

b) Po kolika letech by se počet obyvatel zvýšil na 90 000?

Situaci popisuje funkce $y = 63810 \cdot 1,028^x$, x … roky, y … počet obyvatel

a) $y = 63810 \cdot 1,028^8 = 79585$

b) $90000 = 63810 \cdot 1,028^x$

$$\frac{90000}{63810} = 1,028^x$$

$$x = \log_{1,028} \frac{90000}{63810} \doteq 12,5$$

Za 8 let by město mělo 79 585 obyvatel. Počet obyvatel by se zvýšil na 90 00 za 12,5 roku.

---

21) Počáteční množství dřeva v lese bylo odhadnuto na 32 500 m^3 a jeho průměrný roční úbytek na 5,2 %.

a) Kolik m^3 dřeva by bylo v lese bez těžby a výsadby za 5 let?

b) Za jak dlouho by se původní množství dřeva (bez těžby a výsadby) snížilo na 20 000 m^3?

Situaci popisuje funkce $y = 32500 \cdot 0,948^x$, x … roky, y … počet m^3 dřeva

a) $y = 32500 \cdot 0,948^5 = 24884$

b) $20000 = 32500 \cdot 0,948^x$

$$\frac{20000}{32500} = 0,948^x$$

$$x = \log_{0,948} \frac{20000}{32500} \doteq 9,1$$

Za 5 let by v lese bylo 24 884 m^3 dřeva. Množství dřeva by se snížilo na 20 000 m^3 za 9 let.