Exponenciální rovnice

Exponenciální rovnice jsou rovnice, ve kterých je neznámá veličina v exponentu.
Například:

$2^x = 3$

$5^{x-1} = 25$

$2 \cdot 4^{2x+3} = 16 \cdot 2^x$

Metody řešení exponenciálních rovnic

- převod na stejný základ
- logaritmování

Řešení exponenciálních rovnic převodem na stejný základ

Rovnice se upraví tak, aby na každé straně rovnice byla pouze jedna mocnina (obě mocniny musí mít stejný základ), pak platí:
jestliže $a^p = a^q$, pak $p = q$.
Slovně: jestliže se rovnají mocniny o stejném základu, pak se rovnají jejich exponenty.
Např.: jestliže $5^{2x-3} = 5^{4+7x}$, pak $2x - 3 = 4 + 7x$.

Tato metoda se dá použít k řešení exponenciálních rovnic, ve kterých se vyskytují pouze mocniny jednoho určitého čísla, například mocniny čísla 2, 3 nebo 5. Proto je užitečné znát mocniny těchto čísel:

mocniny čísla 2:

2^{-3}	2^{-2}	2^{-1}	2^0	2^1	2^2	2^3	2^4	2^5	2^6
0,125	0,25	0,5	1	2	4	8	16	32	64

mocniny čísla 3:

3^0	3^1	3^2	3^3	3^4	3^5
1	3	9	27	81	243

mocniny čísla 5:

5^{-2}	5^{-1}	5^0	5^1	5^2	5^3	5^4
0,04	0,2	1	5	25	125	625

Pro úpravu exponenciálních rovnic na tvar „mocnina = mocnina“ se používají tato pravidla:

Věty pro počítání s mocninami

Mocniny se stejným základem násobíme tak, že základ opíšeme a exponenty sečteme.

$a^r \cdot a^s = a^{r+s}$

Mocniny se stejným základem dělíme tak, že základ opíšeme a exponenty odečteme.

$a^r : a^s = \frac{a^r}{a^s} = a^{r-s}$

Mocninu umocníme tak, že základ opíšeme a exponenty vynásobíme.

$\left(a^r\right)^s = a^{rs}$

Součin umocňujeme tak, že musíme umocnit každého činitele.

$\left(a \cdot b\right)^n = a^n \cdot b^n$

Podíl umocňujeme tak, že musíme umocnit čitatele i jmenovatele.

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

Definice mocniny se záporným exponentem

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} \ , \quad a \neq 0$$

Například: $5^{-1} = \frac{1}{5^1} = \frac{1}{5}$

Pravidlo pro umocňování zlomků záporným mocnitelem

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$$

Zlomek umocníme záporným mocnitelem tak, že:
1. zlomek převrátíme (prohodíme čitatele a jmenovatele)
2. u mocnitele změníme znaménko na kladné

Například: $\left(\frac{2}{3}\right)^{-1} = \left(\frac{3}{2}\right)^{+1} = \frac{3}{2}$

Převod odmocniny na mocninu

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$$

Například: $\sqrt{3} = \sqrt[2]{3^1} = 3^{\frac{1}{2}}$, $\sqrt[3]{5} = 5^{\frac{1}{3}}$

Řešení exponenciálních rovnic logaritmováním

Tímto způsobem se řeší rovnice, ve kterých se vyskytují čísla, která nejde převést na mocniny jednoho čísla.
Například:
$2^x = 100 \quad , \quad 3^{x+2} = 4 \quad , \quad 2 \cdot 5^{x-1} = 6$ atd.
Řešit exponenciální rovnice logaritmováním lze dvěma způsoby.

1. způsob
Použijeme převod, který už známe

Zápis $x = a^y$ je ekvivalentní se zápisem $y = \log_a x$. Tj. když se nám to hodí, tak místo $x = a^y$ můžeme napsat $y = \log_a x$

Tento způsob lze použít pouze v případě, kdy v rovnici je jen jedna mocnina s neznámou v exponentu.

Příklady

1) $2^x = 100$
$x = \log_2 100$
$x \doteq 6,64$

2) $3^{x+2} = 4$

$x + 2 = \log_3 4$

$x = \log_3 4 - 2$

$x \doteq -0,74$

3) $2 \cdot 5^{x-1} = 6$

$5^{x-1} = 3$

$x - 1 = \log_5 3$

$x = 1 + \log_5 3$

$x \doteq 1,68$

2. způsob

Rovnici logaritmujeme logaritmem o základu 10.
Při následující úpravě logaritmované rovnice použijeme 3. větu o logaritmech:

> 3) Logaritmus mocniny kladného čísla je roven součinu exponentu a logaritmu základu mocniny.
> $\log_a x^n = n \cdot \log_a x$

Pro desítkový logaritmus to bude $\log x^n = n \cdot \log x$
Tím „sesadíme exponent na řádek“, například:

$\log 5^x = x \cdot \log 5$

$\log 4^{x-2} = (x-2) \cdot \log 4$

$\log 10^{3x-1} = (3x-1) \cdot \log 10$

Dostaneme tak lineární rovnici.

Příklady

1) $2^x = 100 \quad / \log$

$\log 2^x = \log 100$

$x \cdot \log 2 = \log 100$

$$x = \frac{\log 100}{\log 2}$$

$x \doteq 6,64$

2) $3^{x+2} = 4 \quad / \log$

$\log 3^{x+2} = \log 4$

$(x+2) \cdot \log 3 = \log 4$

$x \cdot \log 3 + 2 \cdot \log 3 = \log 4$

$x \cdot \log 3 = \log 4 - 2 \cdot \log 3$

$$x = \frac{\log 4 - 2 \cdot \log 3}{\log 3}$$

$x \doteq -0,74$

3) $2 \cdot 5^{x-1} = 6$

$5^{x-1} = 3 \quad / \log$

$\log 5^{x-1} = \log 3$

$(x-1) \cdot \log 5 = \log 3$

$x \cdot \log 5 - \log 5 = \log 3$

$x \cdot \log 5 = \log 3 + \log 5$

$x = \dfrac{\log 3 + \log 5}{\log 5}$

$x \doteq 1,68$