Goniometrické funkce

Přehled goniometrických funkcí obecného úhlu

funkční rovnice	**definiční obor**	**obor funkčních hodnot**
$y = \sin x$	$x \in (-\infty;\infty)$	$y \in \langle -1;1 \rangle$
$y = \cos x$	$x \in (-\infty;\infty)$	$y \in \langle -1;1 \rangle$
$y = \operatorname{tg} x$	$x \neq (2k+1)\cdot\frac{\pi}{2}, k \in Z$, tj. funkce tangens není definovaná pro liché násobky $\frac{\pi}{2}$	$y \in (-\infty;\infty)$
$y = \operatorname{cotg} x$	$x \neq k\cdot\pi, k \in Z$, tj. funkce kotangens není definovaná pro všechny násobky π	$y \in (-\infty;\infty)$

Stupňová míra, oblouková míra

velikost úhlu ve stupních	0°	90°	180°	270°	360°	30°	45°	60°
velikost úhlu v radiánech	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$

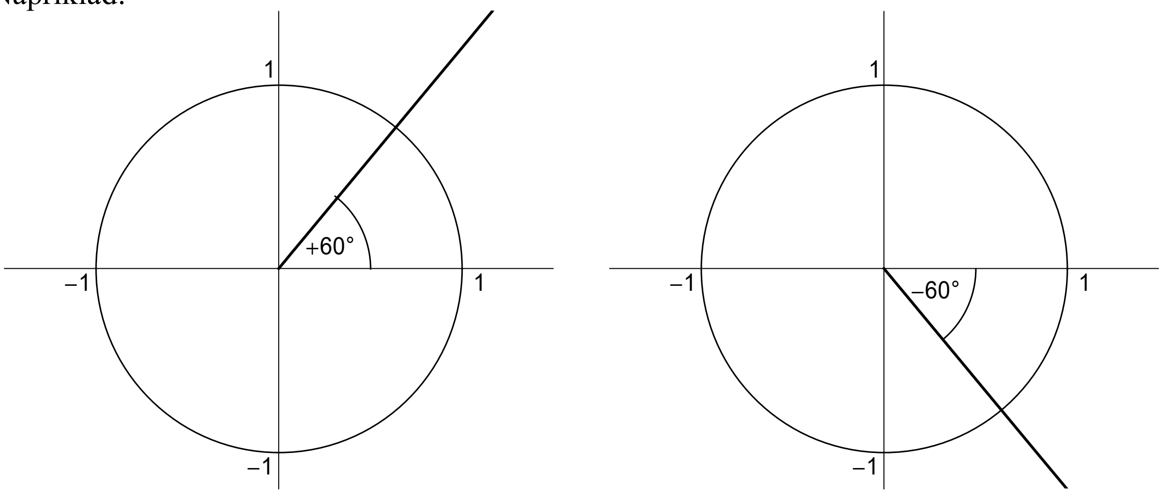
Jednotková kružnice

Jednotková kružnice je kružnice se středem v počátku soustavy souřadnic a o poloměru 1. Pomocí jednotkové kružnice můžeme určovat goniometrické funkce pro libovolný úhel a řešit goniometrické rovnice.

Úhly vynášíme tak, že počáteční rameno je totožné s kladnou částí souřadnicové osy *x* a koncové rameno je určeno velikostí úhlu:

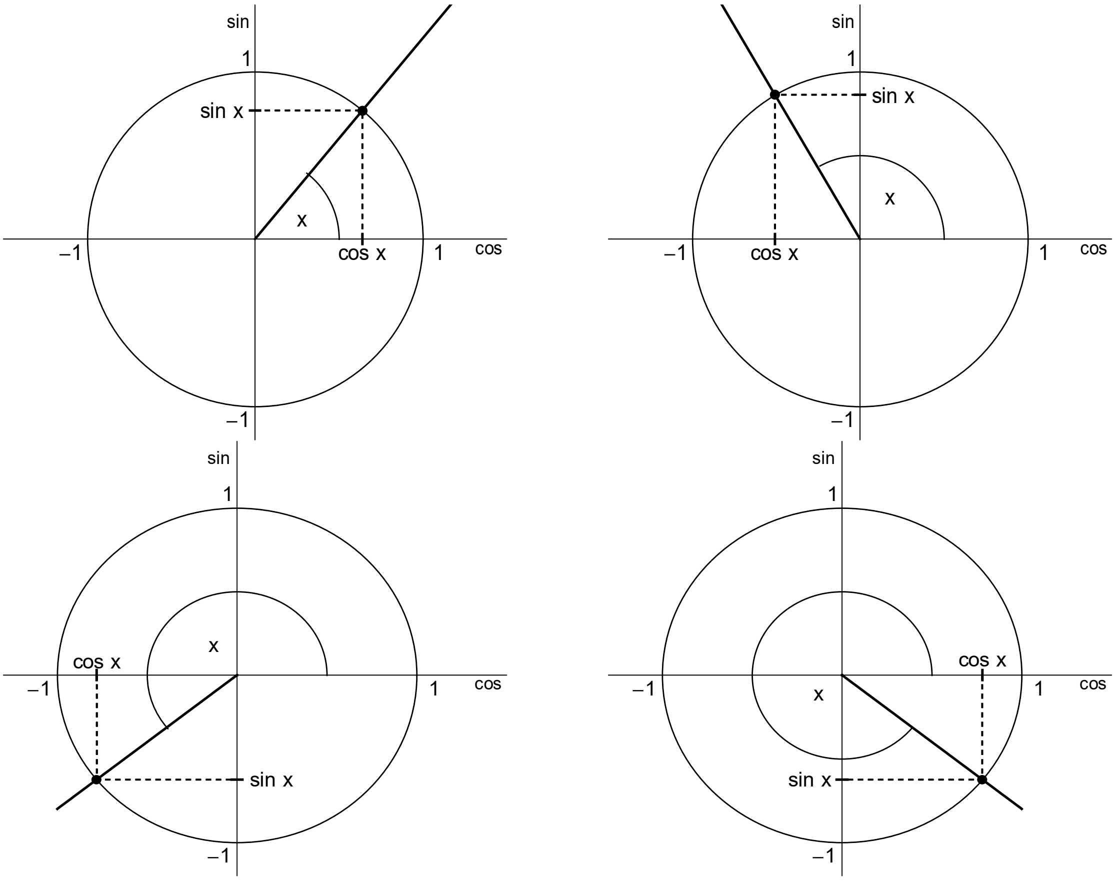
- ☞ úhel s kladnou velikostí: otáčíme proti směru hodinových ručiček
- ☞ úhel se zápornou velikostí: otáčíme ve směru hodinových ručiček

Například:



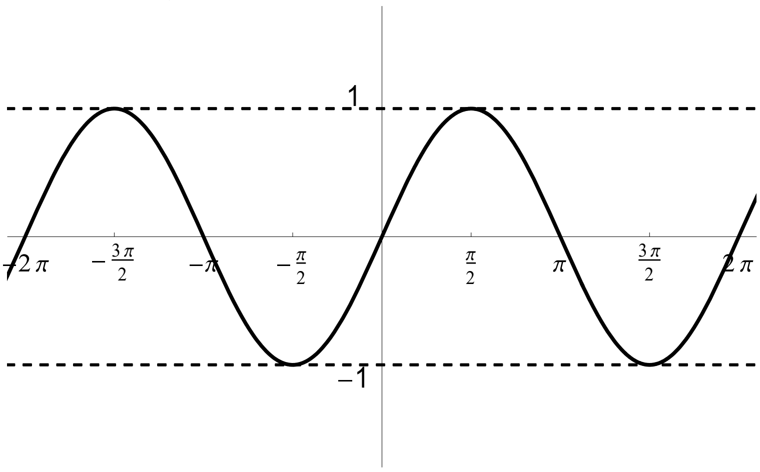
Funkce sinus a kosinus

Jednotková kružnice

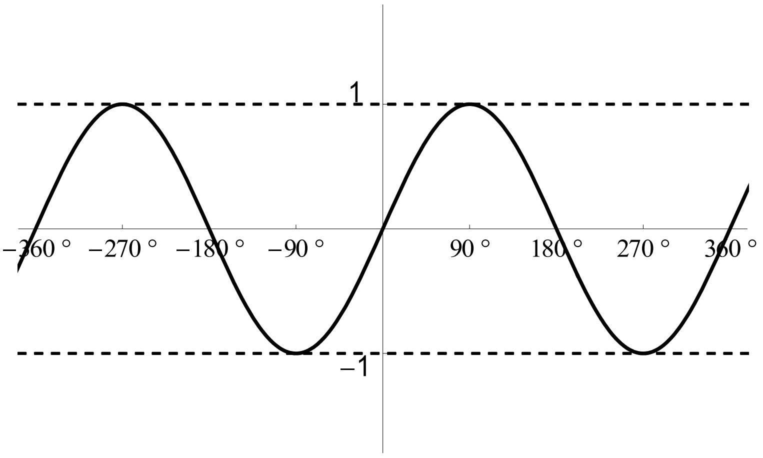


Grafy

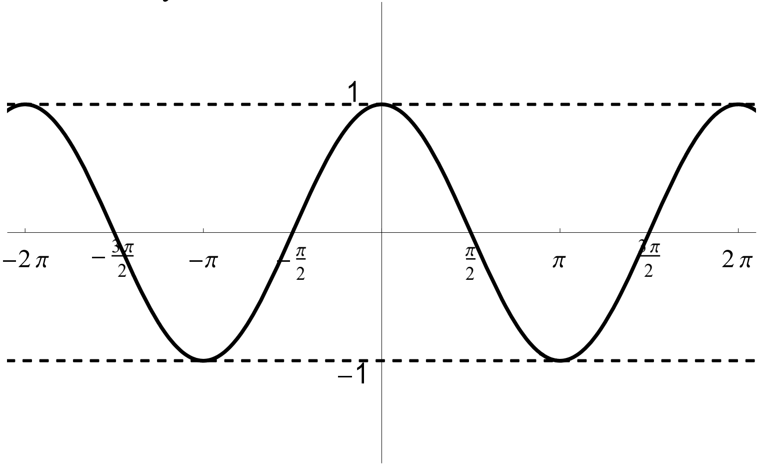
Graf funkce $y = \sin x$ v radiánech



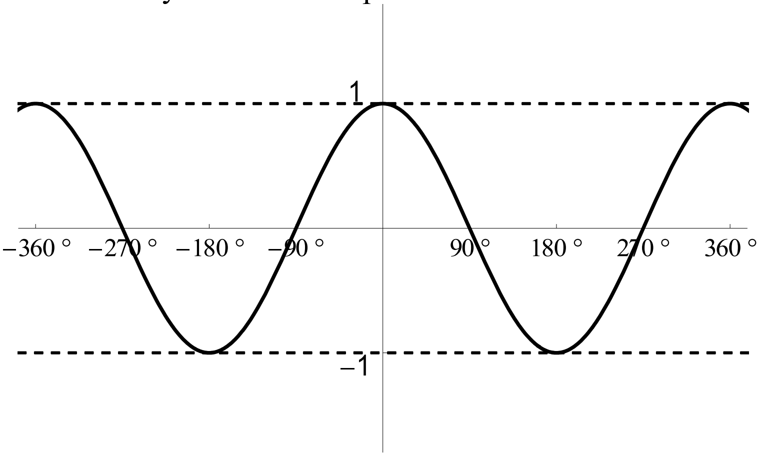
Graf funkce $y = \sin x$ ve stupních



Graf funkce y = cos x v radiánech



Graf funkce y = cos x ve stupních



Periodičnost funkcí sinus a kosinus

Goniometrické funkce sinus a kosinus jsou periodické s periodou 2π (360°)

$\sin(x + 2k\pi) = \sin x$ $\qquad$ $\sin(x + k \cdot 360^\circ) = \sin x$

$\cos(x + 2k\pi) = \cos x$ $\qquad$ $\cos(x + k \cdot 360^\circ) = \cos x$

Tzn.: jestliže zvětšíme nebo zmenšíme úhel o 360° (2π radiánů), tak je sinus i kosinus stejný.
Např. sin 30° = sin 390° = sin 750°

Funkce tangens a kotangens

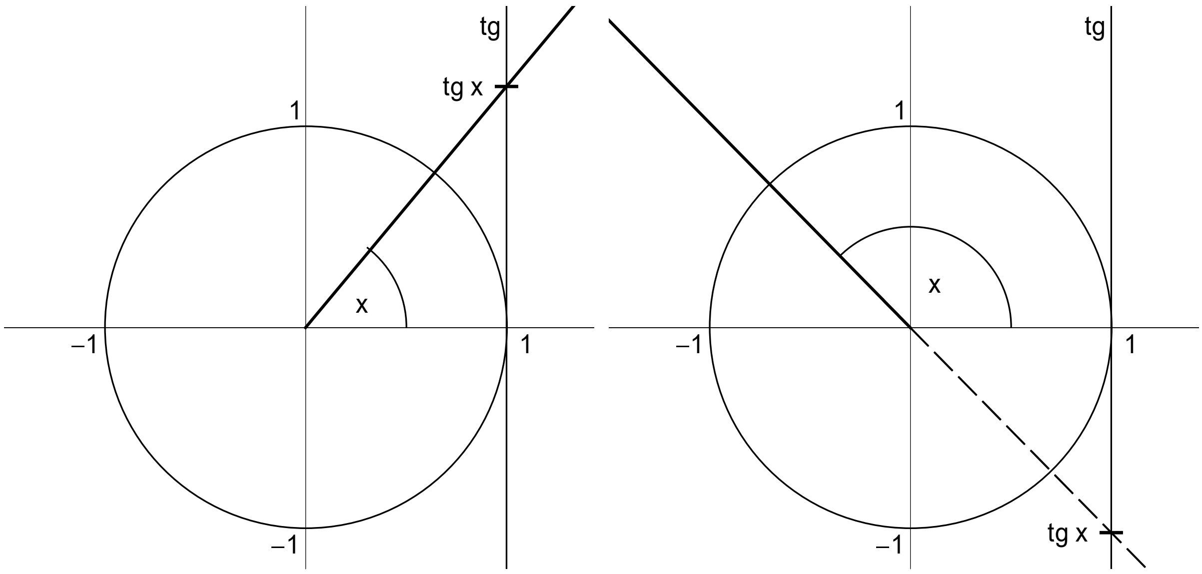
Definice funkcí tangens a kotangens

Funkce tangens a kotangens jsou definovány vztahy:

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x} \quad , \quad x \neq (2k+1)\cdot\frac{\pi}{2}, k \in Z$$

$$\operatorname{cotg} x = \frac{\cos x}{\sin x} \quad , \quad x \neq k\cdot\pi, k \in Z$$

Jednotková kružnice



Grafy funkcí y = tg x a y = cotg x

Viz Matematické, fyzikální a chemické tabulky str. 89

Periodičnost funkcí tangens a kotangens

Goniometrické funkce tangens a kotangens jsou periodické s periodou π (180°)

$$\operatorname{tg}(x+k\pi) = \operatorname{tg} x \qquad \operatorname{tg}(x+k\cdot 180^\circ) = \operatorname{tg} x$$

$$\operatorname{cotg}(x+k\pi) = \operatorname{cotg} x \qquad \operatorname{cotg}(x+k\cdot 180^\circ) = \operatorname{cotg} x$$

Tzn.: jestliže zvětšíme nebo zmenšíme úhel o 180° (π radiánů), tak je tangens i kotangens stejný.
Např. tg 30° = tg 210° = tg 390°

Vztahy mezi goniometrickými funkcemi

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \text{ , } \operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x} \text{ , } \operatorname{cotg} x = \frac{\cos x}{\sin x} \text{ , } \operatorname{tg} x = \frac{1}{\operatorname{cotg} x}$$