

Řešení obecného trojúhelníku

Trojúhelník je jednoznačně určen třemi prvky:

- ☞ tři strany (věta sss)
- ☞ dvě strany a úhel jimi sevřený (věta sus)
- ☞ dvě strany a úhel proti větší z nich (věta Ssu)
- ☞ jedna strana a libovolné dva úhly (věta usu)

Řešení obecného trojúhelníku (tj. ne pravoúhlého): trojúhelník je zadán třemi prvky a my máme určit libovolný zbývající prvek (stranu nebo úhel).

Pro řešení obecného trojúhelníku se používají trigonometrické věty: sinová věta a kosinová věta.

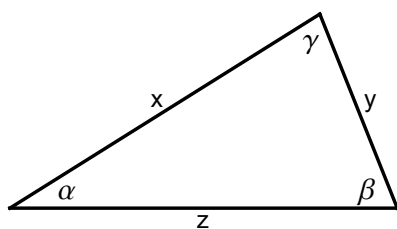
Trigonometrické věty

Sinová věta

Slovní vyjádření:

Poměr libovolných dvou stran trojúhelníku je roven poměru sinů protilehlých úhlů.

Například



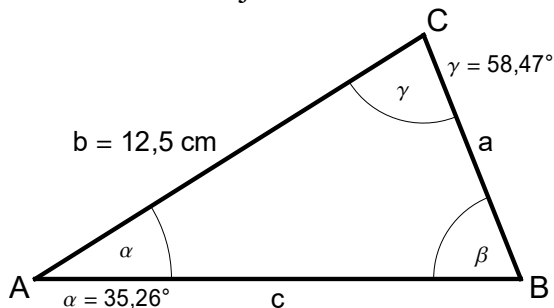
$$\frac{x}{y} = \frac{\sin \beta}{\sin \alpha} \quad \frac{z}{x} = \frac{\sin \gamma}{\sin \beta} \quad \frac{\sin \alpha}{\sin \gamma} = \frac{y}{z} \quad \text{apod.}$$

- ☞ sinovou větu používáme v případě, že v trojúhelníku známe dvojici protilehlých prvků (strana – úhel).
- ☞ pomocí sinové věty můžeme počítat pouze prvek (stranu nebo úhel) u něhož známe protilehlý prvek (úhel nebo stranu).
- ☞ pro výpočet je vhodné začít tím, co počítáme (tj. dát prvek, který počítáme, do čitatele zlomku na levé straně sinové věty).

Vzorové příklady na sinovou větu

1) V trojúhelníku ABC je dáno: $\alpha = 35,26^\circ$, $\gamma = 58,47^\circ$, $b = 12,5$ cm. Určete zbývající strany a úhly trojúhelníku.

Bez obrázku to nejde:



Neznáme dvojici protilehlých prvků, ale můžeme ji znát, pokud dopočítáme velikost úhlu β .

1) $\beta = ?$

$$\beta = 180^\circ - 35,26^\circ - 58,47^\circ = 86,27^\circ$$

Nyní známe dvojici protilehlých prvků $\beta \leftrightarrow b$, takže můžeme použít sinovou větu k výpočtu strany a .

2) $a = ?$

a) připravíme si „kostru“ sinové věty $\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta}$

b) do čitatele zlomku na levé straně napíšeme veličinu, kterou hledáme, tj. $a: \frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta}$

c) ve jmenovateli musí být strana, kterou známe, tj. $b: \frac{a}{b} = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta}$

d) na pravé straně musí být sinus protilehlých úhlů: $\frac{a}{b} = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta}$

Tím máme sestavenou sinovou větu a další postup už je jednoduchý:

$$\frac{a}{b} = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} \quad / \cdot b$$

$$a = b \cdot \frac{\sin \alpha}{\sin \beta}$$

$$a = 12,5 \cdot \frac{\sin 35,26^\circ}{\sin 86,27^\circ} = 7,2$$

$$b = 7,2 \text{ cm}$$

Podobně spočítáme stranu c .

3) $c = ?$

$$\frac{c}{b} = \frac{\sin \gamma}{\sin \beta} \quad / \cdot b$$

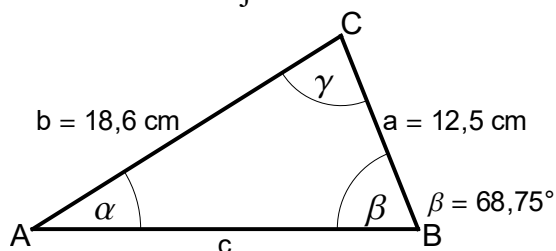
$$c = b \cdot \frac{\sin \gamma}{\sin \beta}$$

$$a = 12,5 \cdot \frac{\sin 58,47^\circ}{\sin 86,27^\circ} = 10,7$$

$$c = 10,7 \text{ cm}$$

2) V trojúhelníku ABC je dáno: $\beta = 68,75^\circ$, $a = 12,5 \text{ cm}$, $b = 18,6 \text{ cm}$. Určete zbývající strany a úhly trojúhelníku.

Bez obrázku to nejde.



Známe dvojici protilehlých prvků $\beta \leftrightarrow b$, takže můžeme použít sinovou větu k výpočtu úhlu α (tento úhel můžeme počítat, protože známe protilehlý prvek, stranu a ; stranu c ani úhel γ zatím počítat nemůžeme).

1) $\alpha = ?$

a) připravíme si „kostru“ sinové věty $\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{a}{b}$

b) do čitatele zlomku na levé straně napíšeme veličinu, kterou hledáme, tj. $\sin \alpha: \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{a}{b}$

c) ve jmenovateli musí být sin úhlu, který známe, tj. $\sin \beta: \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{a}{b}$

d) na pravé straně musí být protilehlé strany: $\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{a}{b}$

Tím máme sestavenou sinovou větu a další postup už je jednoduchý:

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{a}{b} \quad / \cdot \sin \beta$$

$$\sin \alpha = \sin \beta \cdot \frac{a}{b}$$

$$\sin \alpha = \sin 68,75^\circ \cdot \frac{12,5}{18,6} = 0,6263$$

$$\alpha = 38,78^\circ$$

Nyní dopočítáme úhel γ , abychom mohli určit protilehlou stranu c .

$$2) \gamma = ?$$

$$\gamma = 180^\circ - 38,78^\circ - 68,75^\circ = 72,47^\circ$$

$$3) c = ?$$

$$\frac{c}{a} = \frac{\sin \gamma}{\sin \alpha} \quad / \cdot a$$

$$c = a \cdot \frac{\sin \gamma}{\sin \alpha} = 12,5 \cdot \frac{\sin 72,47^\circ}{\sin 38,78^\circ} = 19,0 \text{ cm}$$

šlo by i

$$\frac{c}{b} = \frac{\sin \gamma}{\sin \beta} \quad / \cdot b$$

$$c = b \cdot \frac{\sin \gamma}{\sin \beta} = 18,6 \cdot \frac{\sin 72,47^\circ}{\sin 68,75^\circ} = 19,0 \text{ cm}$$

Kosinová věta

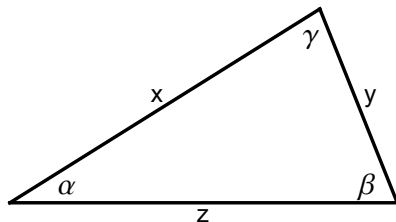
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \alpha$$

Důležité k zapamatování:

levá strana kosinové věty: libovolná strana trojúhelníku

pravá strana kosinové věty: zbývající dvě strany a úhel jimi sevřený (tj. **úhel proti straně, která je na levé straně kosinové věty**)

Například:



$$x^2 = z^2 + y^2 - 2zy \cdot \cos \beta$$

$$y^2 = x^2 + z^2 - 2xz \cdot \cos \alpha$$

$$z^2 = x^2 + y^2 - 2xy \cdot \cos \gamma$$

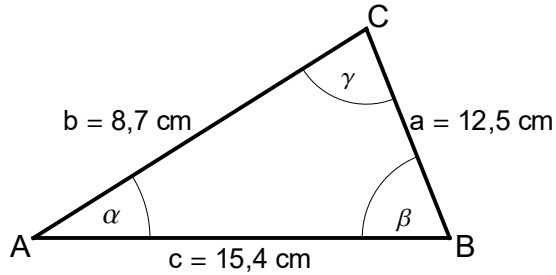
Kdy použijeme sinovou větu a kdy kosinovou:

sinová věta: známe nebo můžeme určit (dopocítáním úhlu) dvojici protilehlých prvků (strana – úhel), tj. trojúhelník je určen pomocí věty Ssu nebo usu

kosinová věta: neznáme ani nemůžeme určit dvojici protilehlých prvků (strana – úhel), tj. trojúhelník je určen pomocí věty sss nebo sus

Vzorové příklady na kosinovou větu

- 1) Vypočítejte velikosti vnitřních úhlů trojúhelníku ABC, jehož délky stran jsou: $a = 12,5$ cm; $b = 8,7$ cm; $c = 15,4$ cm.



Nejprve spočítáme největší úhel v trojúhelníku, což je úhel proti největší straně, v našem případě úhel γ . Počítáme ho jako první proto, protože tento úhel může být ostrý i tupý a funkce cos to jednoznačně určí (cos je pro ostré úhly kladný, pro tupé záporný).

1) $\gamma = ?$

Sestavíme kosinovou větu s úhlem γ :

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos \gamma$$

Ted' pozor na to, že výraz $-2ab \cdot \cos \gamma$ obsahuje pouze násobení, proto ho musíme brát jako jeden člen (násobení má přednost před sčítáním).

$$2ab \cdot \cos \gamma = a^2 + b^2 - c^2 \quad / : 2ab$$

$$\cos \gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{12,5^2 + 8,7^2 - 15,4^2}{2 \cdot 12,5 \cdot 8,7} = -0,024$$

$$\gamma = 91,4^\circ$$

Další úhly už můžeme vypočítat pomocí sinové věty, která je jednodušší.

2) $\alpha = ?$

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \gamma} = \frac{a}{c} \quad / \cdot \sin \gamma$$

$$\sin \alpha = \sin \gamma \cdot \frac{a}{c}$$

$$\sin \alpha = 0,8114$$

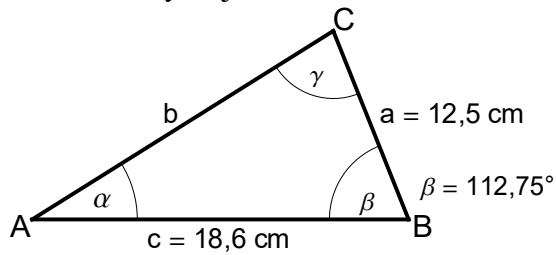
$$\alpha = 54,2^\circ$$

3) $\beta = ?$

$$\beta = 180^\circ - \alpha - \gamma$$

$$\beta = 34,4^\circ$$

- 2) V trojúhelníku ABC je dáno: $\beta = 112,75^\circ$, $a = 12,5$ cm, $c = 18,6$ cm. Určete zbývající strany a úhly trojúhelníku.



Neznáme dvojici protilehlých prvků, proto musíme použít kosinovou větu. Známe úhel β , na levé straně kosinové věty bude proto strana b.

1) $b = ?$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos \beta$$

$$b = \sqrt{a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos \beta}$$

$$b = \sqrt{12,5^2 + 18,6^2 - 2 \cdot 12,5 \cdot 18,6 \cdot \cos 112,75^\circ}$$

$$b = 26,1 \text{ cm}$$

Teď už známe dvojici protilehlých prvků $\beta \leftrightarrow b$, proto můžeme použít k výpočtu dalších úhlů sinovou větu.

2) $\alpha = ?$

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{a}{b} \quad / \cdot \sin \beta$$

$$\sin \alpha = \sin \beta \cdot \frac{a}{b}$$

$$\sin \alpha = 0,4417$$

$$\alpha = 26,2^\circ$$

3) $\gamma = ?$

$$\gamma = 180^\circ - \alpha - \beta$$

$$\gamma = 41,1^\circ$$