Řešení obecného trojúhelníku

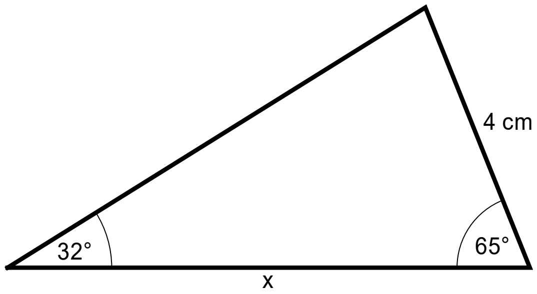
Znak absolutní hodnoty v souvislosti s body nebo úhly znamená velikost, např.

$|MN|$ vzdálenost bodů M, N neboli velikost úsečky MN

$|\sphericalangle NMP|$ velikost úhlu $\sphericalangle NMP$

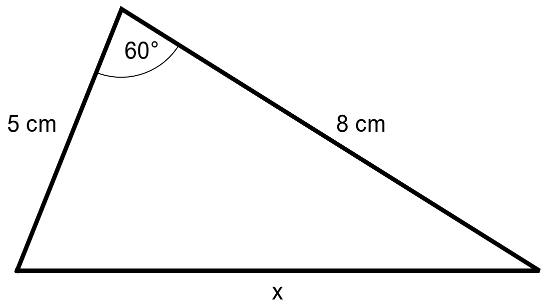
Příklady

1)



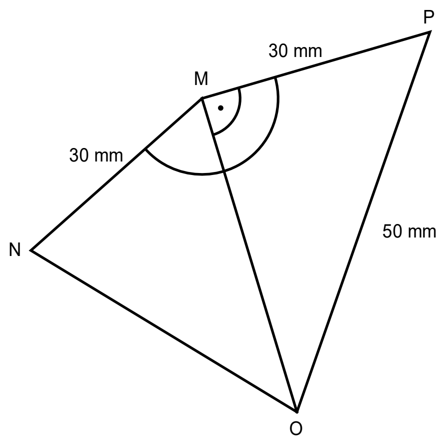
Vypočtěte velikost úsečky *x*.

2)



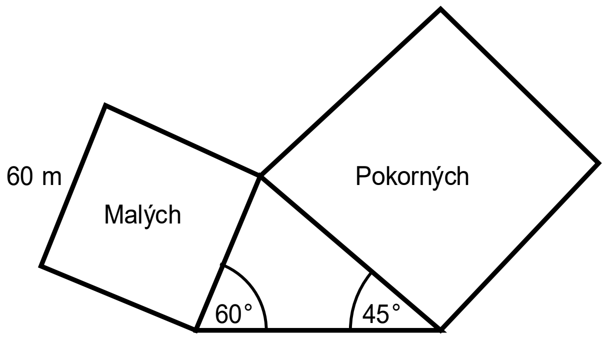
Vypočtěte velikost úsečky *x*.

3) Ve čtyřúhelníku MNOP platí: $|MN| = |MP| = 30\,mm, |OP| = 50\,mm, |\sphericalangle NMP| = 150°, |\sphericalangle OMP| = 90°$



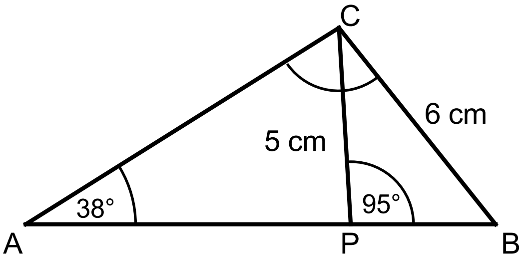
Jaká je délka strany NO?

4) Na trojúhelníkový pozemek navazují čtvercové pozemky Malých a Pokorných.



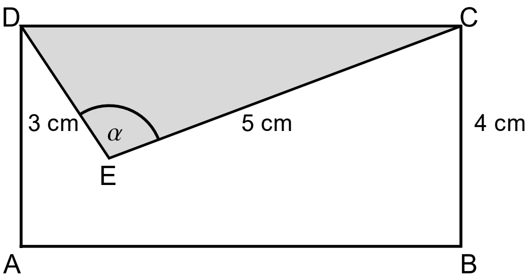
O kolik m^2 je výměra pozemku Malých menší než výměra pozemku Pokorných?

5) V trojúhelníku ABC platí: $|BC| = 6\,cm,\ |CP| = 5\,cm,\ |\sphericalangle BAC| = 38°, |\sphericalangle BPC| = 95°, P \in AB$



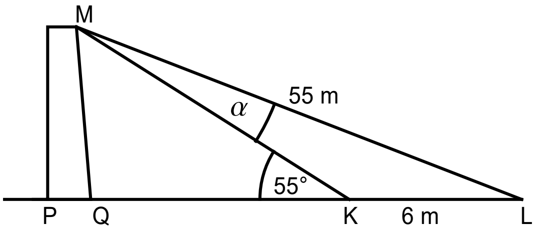
Jaká je velikost vnitřního úhlu *ACB* v daném trojúhelníku?

6) V obdélníku ABCD o obsahu 28 cm^2 je umístěn trojúhelník CDE. Oba obrazce mají společnou stranu CD. Platí: $|BC| = 4\,cm,\ |CE| = 5\ cm,\ |DE| = 3\ cm$.



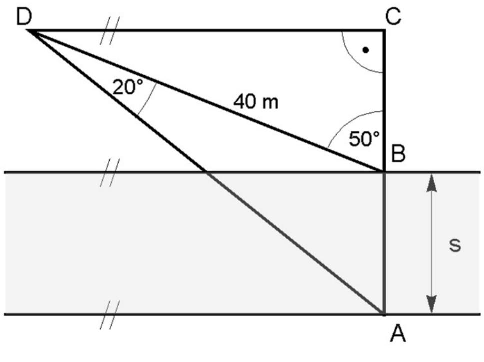
Vypočtěte velikost úhlu α.

7) Z místa pozorování M je možné zaměřit body K, L na obou krajích silnice v zorném úhlu α. Platí: $|ML| = 55\ m,\ |KL| = 6\ m,\ |\sphericalangle QKM| = 55°,\ |\sphericalangle KML| = \alpha$, body Q, K a L leží na jedné přímce.



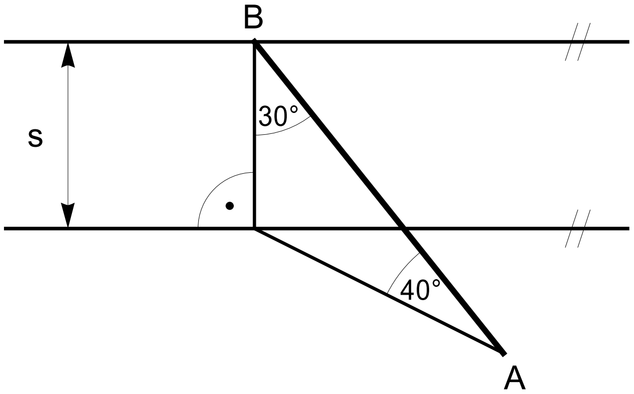
Jaká je velikost zorného úhlu α?

8) Na břehu řeky se žáci učili obsluhovat měřící přístroje – teodolit a laserový dálkoměr. Změřili následující údaje: $|BD| = 40\,m,\ |\sphericalangle ADB| = 20°,\ |\sphericalangle CBD| = 50°,\ |\sphericalangle ACD| = |\sphericalangle BCD| = 90°$



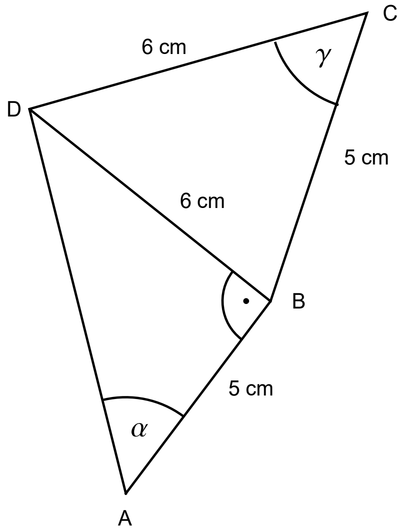
Jaká je šířka řeky $s = |AB|$?

9) V zobrazené situaci je šířka řeky označena symbolem s a vzdálenost AB je 50 m.



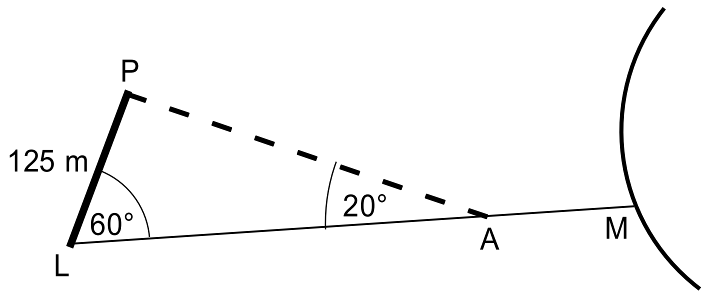
Určete šířku s řeky.

10) Ve čtyřúhelníku ABCD platí: $|AB| = 5\ cm$, $|BC| = 5\ cm$, $|CD| = 6\ cm$, $|BD| = 6\ cm$, $|\sphericalangle ABD| = 90°$.



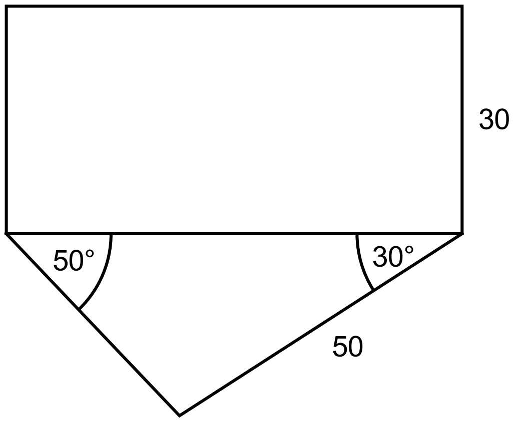
Vypočtěte velikost úhlu $\alpha = |\sphericalangle DAB|$ **a velikost úhlu** $\gamma = |\sphericalangle BCD|$**.**

11) Hranice LP mezi dvěma pozemky má délku 125 metrů. Od jejího levého okraje L vede rovná pěšina LM, která s touto hranicí svírá úhel o velikosti 60°. Na pěšině je stanoviště A, z něhož je hranice LP vidět pod zorným úhlem 20°.



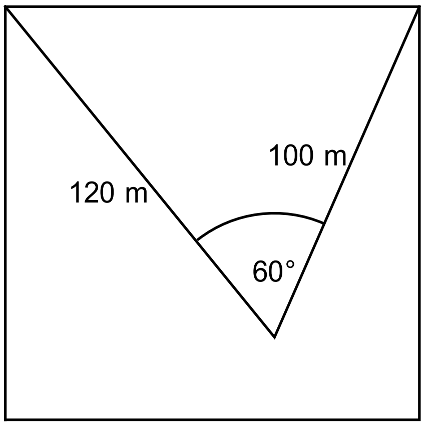
Jaká je vzdálenost *AL* stanoviště *A* od levého okraje *L* hranice *LP*?

12) Obdélníkový a trojúhelníkový pozemek mají společnou hranici. Na plánu jsou rozměry uvedeny v metrech.



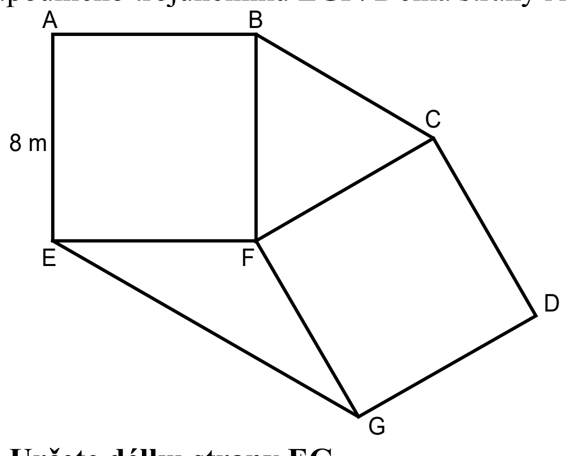
Určete obsah obdélníkového pozemku vypočtený s přesností na m^2.

13) Uvnitř čtvercového pozemku se žáci učili obsluhovat měřicí přístroje – teodolit a laserový dálkoměr. Našli si místo, z něhož viděli jednu stranu pozemku pod úhlem 60°. Poté určili vzdálenost tohoto místa od krajních bodů sledované strany (120 m a 100 m).



Jaký je obsah čtvercového pozemku?

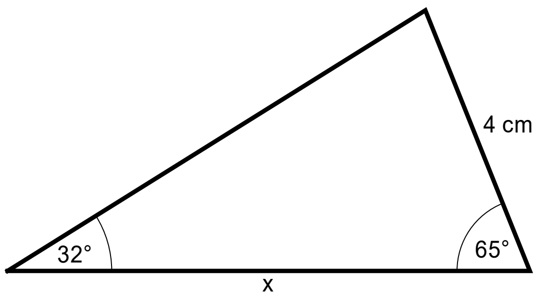
14) Šestiúhelník ABCDGE se skládá ze dvou čtverců EFBA, FGDC, rovnostranného trojúhelníku FBC a tupoúhlého trojúhelníku EGF. Délka strany AE je 8 m.



Určete délku strany EG.

Řešení

1)

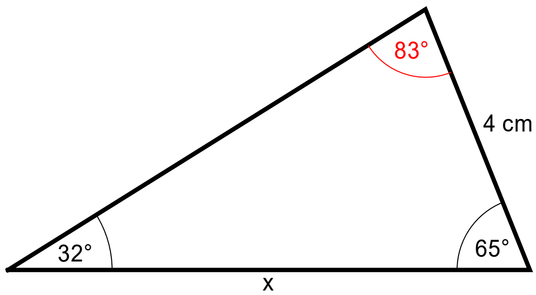


Vypočtěte velikost úsečky *x*.

Řešení

Známe dvojici protilehlých prvků $32° \leftrightarrow 4\,cm$, proto použijeme sinovou větu. Musíme ale nejprve vypočítat protilehlý úhel ke straně x.

$180° - 32° - 65° = 83°$



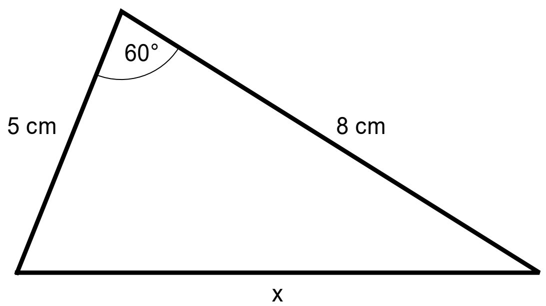
$$\frac{x}{4} = \frac{\sin 83°}{\sin 32°} \quad / \cdot 4$$

$$x = 4 \cdot \frac{\sin 83°}{\sin 32°} = 7{,}5\,cm$$

Velikost úsečky $x = 7{,}5\ cm$.

---

2)



Vypočtěte velikost úsečky *x*.

Řešení

Neznáme dvojici protilehlých prvků, použijeme kosinovou větu.

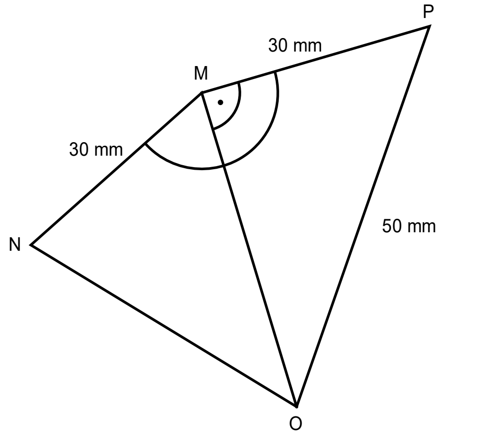
$$x^2 = 5^2 + 8^2 - 2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot \cos 60°$$

$$x = \sqrt{5^2 + 8^2 - 2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot \cos 60°} = 7\,cm$$

Velikost úsečky $x = 7\ cm$.

---

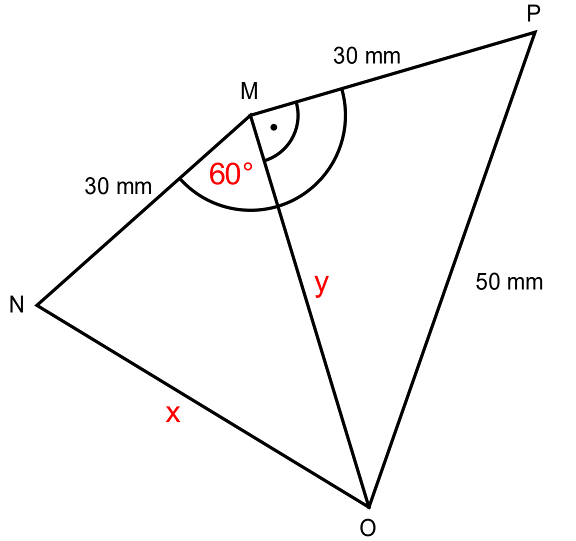
3) Ve čtyřúhelníku MNOP platí: $|MN| = |MP| = 30\,mm, |OP| = 50\,mm, |\sphericalangle NMP| = 150°, |\sphericalangle OMP| = 90°$



Jaká je délka strany NO?

Řešení

Doplníme si do obrázku důležité údaje:



a) velikost úhlu $\sphericalangle NMO = ?$

$|\sphericalangle NMO| = 150° - 90° = 60°$

b) $y = ?$

Délku strany x nemůžeme určit hned, protože v ΔMNO známe pouze dva prvky.

Nejprve musíme určit velikost strany y. Protože ΔMOP je pravoúhlý, můžeme použít Pythagorovu větu:

$y = \sqrt{50^2 - 30^2} = 40\,mm$.

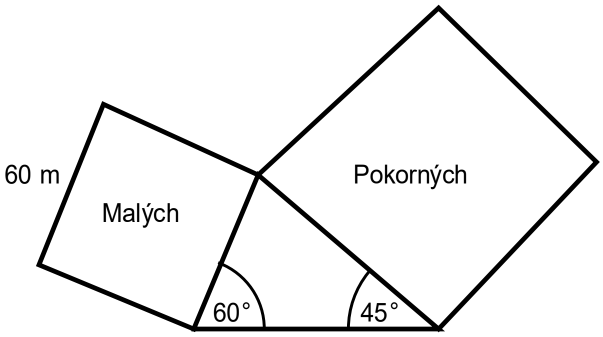
c) $x = ?$

Nyní už známe v ΔMNO dvě strany (MO a MN) a úhel jimi sevřený. a tak můžeme určit velikost strany x pomocí kosinové věty (Pythagorovu větu zde nemůžeme použít, protože tento trojúhelník není pravoúhlý):

$x = \sqrt{30^2 + 40^2 - 2 \cdot 30^2 \cdot 40^2 \cdot \cos 60°} = 36\,mm$

Délka strany *NO* je 36 mm.

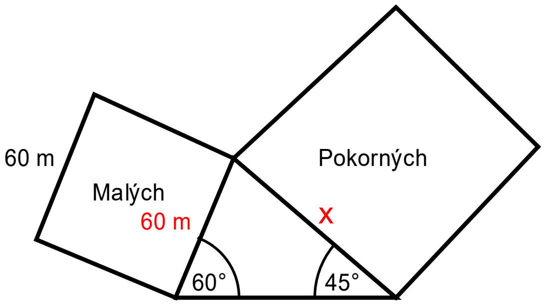
4) Na trojúhelníkový pozemek navazují čtvercové pozemky Malých a Pokorných.



O kolik m^2 je výměra pozemku Malých menší než výměra pozemku Pokorných?

Řešení

Doplníme si do obrázku důležité údaje:



a) $x = ?$

Známe dvojici protilehlých prvků $45° \leftrightarrow 60\,m$, proto můžeme určit x pomocí sinové věty:

$$\frac{x}{60} = \frac{\sin 60°}{\sin 45°} \quad / \cdot 60$$

$$x = 30 \cdot \sqrt{6}\,m$$

b) výměry

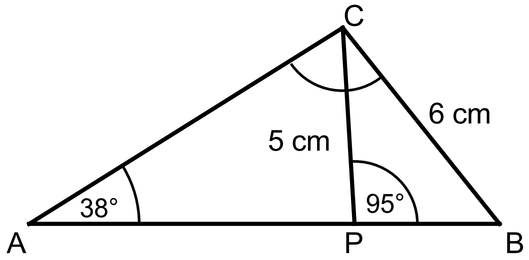
Malých: $S = a^2 = 60^2 = 3600\,m^2$

Pokorných: $S = x^2 = \left(30\sqrt{6}\right)^2 = 5400\,m^2$

$$5400 - 3600 = 1800\,m^2$$

Výměra pozemku Malých je o 1 800 m^2 menší než výměra pozemku Pokorných?

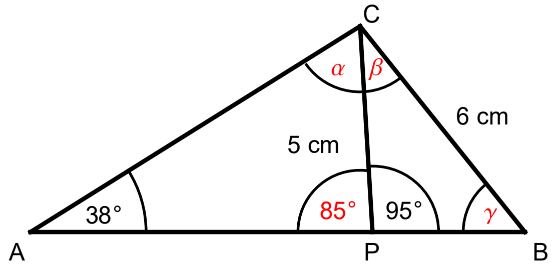
5) V trojúhelníku ABC platí: $|BC| = 6\,cm,\ |CP| = 5\,cm,\ |\sphericalangle BAC| = 38°, |\sphericalangle BPC| = 95°, P \in AB$



Jaká je velikost vnitřního úhlu *ACB* v daném trojúhelníku?

Řešení

Doplníme do obrázku důležité údaje:



Úhel APB je přímý úhel o velikosti 180°, proto velikost úhlu APC je 85°.

a) $\alpha = ?$

$\alpha = 180° - 38° - 85° = 57°$

b) $\gamma = ?$

$$\frac{\sin\gamma}{\sin 95°} = \frac{5}{6} \quad / \cdot \sin 95°$$

$$\sin\gamma = \frac{5}{6} \cdot \sin 96°$$

$\gamma = 56°$

c) $\beta = ?$

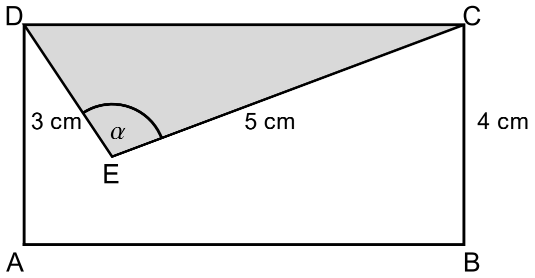
$\beta = 180° - 95° - 56° = 29°$

d) Velikost vnitřního úhlu *ACB =?*

$|\sphericalangle ACB| = \alpha + \beta = 57° + 29° = 86°$

Velikost vnitřního úhlu *ACB* je 86°.

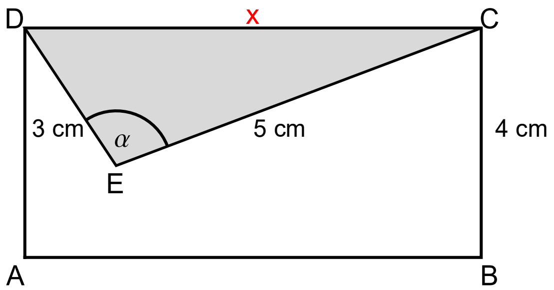
6) V obdélníku ABCD o obsahu 28 cm^2 je umístěn trojúhelník CDE. Oba obrazce mají společnou stranu CD. Platí: $|BC| = 4\,cm$, $|CE| = 5\ cm$, $|DE| = 3\ cm$.



Vypočtěte velikost úhlu α.

Řešení

Doplníme do obrázku důležité údaje:



a) $x = ?$

$S = 4 \cdot x$

$28 = 4 \cdot x$

$x = 7\,cm$

b) $\alpha = ?$

Velikost úhlu α určíme pomocí kosinové věty:

$7^2 = 3^2 + 5^2 - 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cos\alpha$

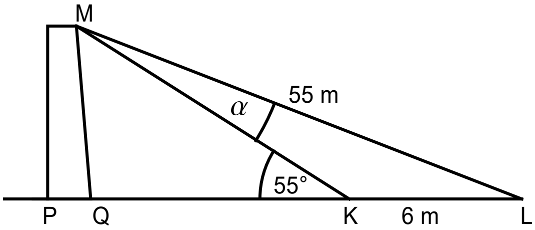
$30 \cdot \cos\alpha = 3^2 + 5^2 - 7^2$

$$\cos\alpha = \frac{3^2 + 5^2 - 7^2}{30}$$

$\alpha = 120°$

Velikost úhlu $\alpha = 120°$**.**

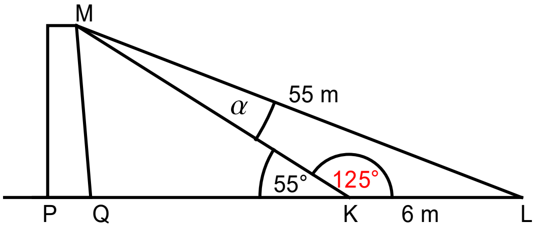
7) Z místa pozorování M je možné zaměřit body K, L na obou krajích silnice v zorném úhlu α. Platí: $|ML| = 55\ m$, $|KL| = 6\ m$, $|\sphericalangle QKM| = 55°$, $|\sphericalangle KML| = \alpha$, body Q, K a L leží na jedné přímce.



Jaká je velikost zorného úhlu α?

Řešení

Doplníme do obrázku důležitý údaj:



Nyní lze spočítat velikost úhlu α z ΔKLM pomocí sinové věty (známe dvojici protilehlých prvků $125° \leftrightarrow 55\,m$:

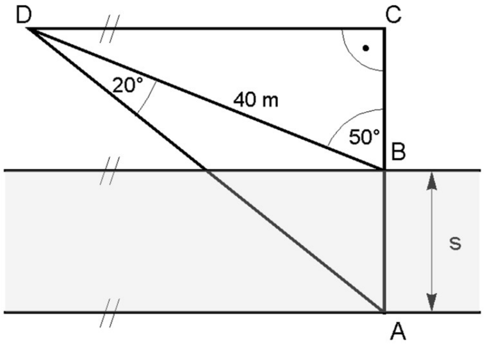
$$\frac{\sin\alpha}{\sin 125°} = \frac{6}{55} \quad / \cdot \sin 125°$$

$$\sin\alpha = \sin 125° \cdot \frac{6}{55}$$

$$\alpha = 5{,}1°$$

Velikost zorného úhlu α je 5,1°.

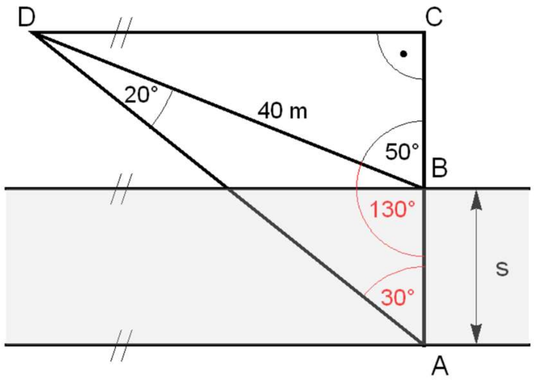
8) Na břehu řeky se žáci učili obsluhovat měřící přístroje – teodolit a laserový dálkoměr. Změřili následující údaje: $|BD| = 40\,m$, $|\sphericalangle ADB| = 20°$, $|\sphericalangle CBD| = 50°$, $|\sphericalangle ACD| = |\sphericalangle BCD| = 90°$



Jaká je šířka řeky $s = |AB|$**?**

Řešení

Do obrázku doplníme důležité údaje:



Nyní můžeme šířku s spočítat z ΔABD pomocí sinové věty, známe protilehlé prvky $30° \leftrightarrow 40\,m$:

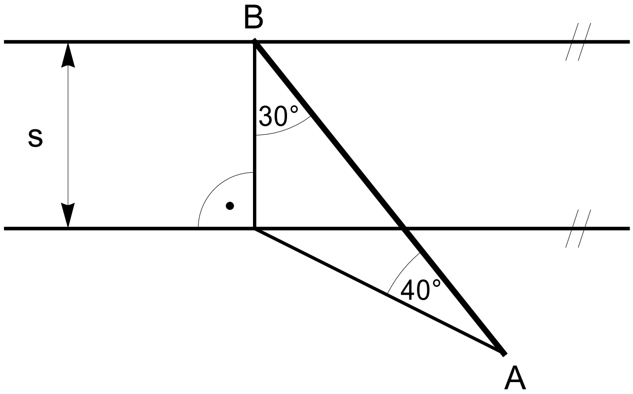
$$\frac{s}{40} = \frac{\sin 20°}{\sin 30°} \quad / \cdot 40$$

$$s = 40 \cdot \frac{\sin 20°}{\sin 30°}$$

$$s = 27\,m$$

Šířka řeky je 27 m.

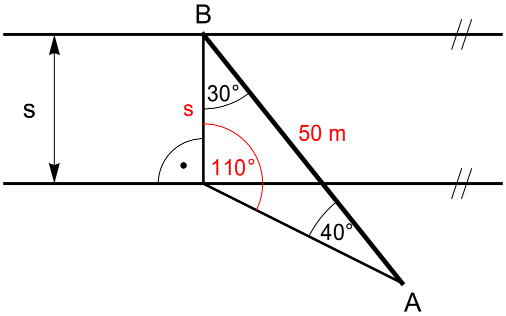
9) V zobrazené situaci je šířka řeky označena symbolem s a vzdálenost AB je 50 m.



Určete šířku s řeky.

Řešení

Do obrázku doplníme důležité údaje:



Nyní můžeme šířku s spočítat pomocí sinové věty, známe protilehlé prvky $110° \leftrightarrow 50\,m$:

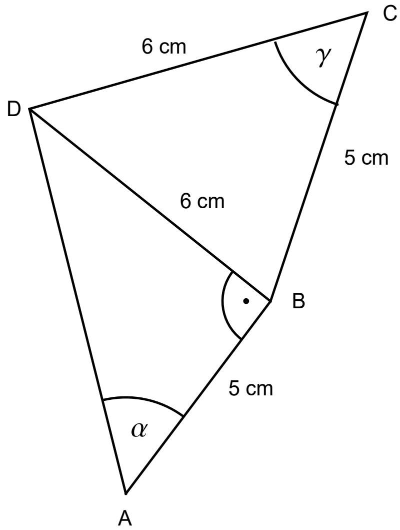
$$\frac{s}{50} = \frac{\sin 40°}{\sin 110°} \quad / \cdot 50$$

$$s = 50 \cdot \frac{\sin 40°}{\sin 110°}$$

$$s = 34{,}2\,m$$

Šířka řeky je 34 m.

10) Ve čtyřúhelníku ABCD platí: $|AB| = 5\ cm$, $|BC| = 5\ cm$, $|CD| = 6\ cm$, $|BD| = 6\ cm$, $|\sphericalangle ABD| = 90°$.



Vypočtěte velikost úhlu $\alpha = |\sphericalangle DAB|$ **a velikost úhlu** $\gamma = |\sphericalangle BCD|$**.**

Řešení

a) $\alpha = ?$

ΔABD je pravoúhlý, proto velikost úhlu α můžeme spočítat pomocí goniometrických funkcí:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{6}{5}$$

$$\alpha = 50,2°$$

b) ΔBCD je obecný trojúhelník, použijeme kosinovou větu:

$$6^2 = 5^2 + 6^2 - 2 \cdot 5 \cdot 6 \cdot \cos\gamma$$

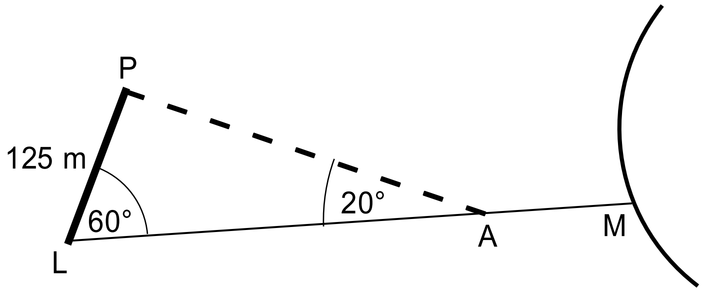
$$2 \cdot 5 \cdot 6 \cdot \cos\gamma = 5^2 + 6^2 - 6^2$$

$$\cos\gamma = \frac{25}{60}$$

$$\gamma = 65,4°$$

$\boldsymbol{\alpha = 50,2°,\ \gamma = 65,4°}$ **.**

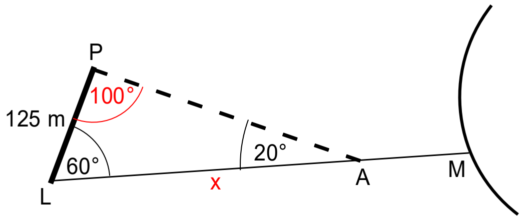
11) Hranice LP mezi dvěma pozemky má délku 125 metrů. Od jejího levého okraje L vede rovná pěšina LM, která s touto hranicí svírá úhel o velikosti 60°. Na pěšině je stanoviště A, z něhož je hranice LP vidět pod zorným úhlem 20°.



Jaká je vzdálenost *AL* stanoviště *A* od levého okraje *L* hranice *LP*?

Řešení

Do obrázku doplníme důležité údaje:



Vzdálenost x spočítáme pomocí sinové věty, protože známe protilehlé prvky $20° \leftrightarrow 125\,m$:

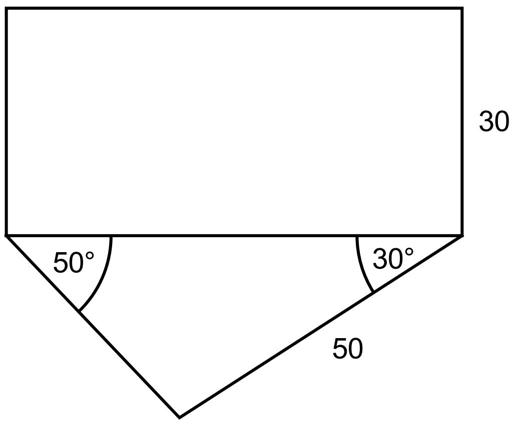
$$\frac{x}{125} = \frac{\sin 100°}{\sin 20°} \quad /\cdot 125$$

$$x = 125 \cdot \frac{\sin 100°}{\sin 20°}$$

$$x = 360\,m$$

Vzdálenost *AL* stanoviště *A* od levého okraje *L* hranice *LP* je 360 m.

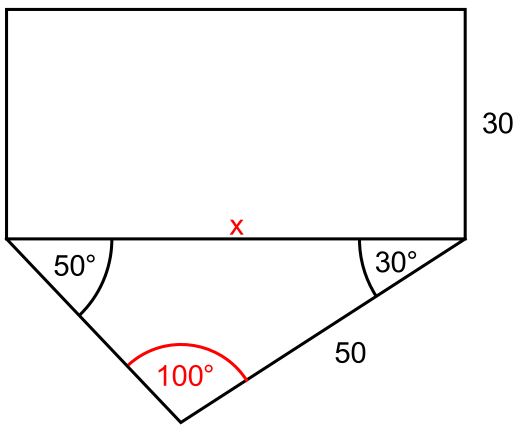
12) Obdélníkový a trojúhelníkový pozemek mají společnou hranici. Na plánu jsou rozměry uvedeny v metrech.



Určete obsah obdélníkového pozemku vypočtený s přesností na m².

Řešení

Do obrázku doplníme důležité údaje:



a) x = ?

$$\frac{x}{50} = \frac{\sin 100°}{\sin 50°} \quad / \cdot 50$$

$$x = 50 \cdot \frac{\sin 100°}{\sin 50°}$$

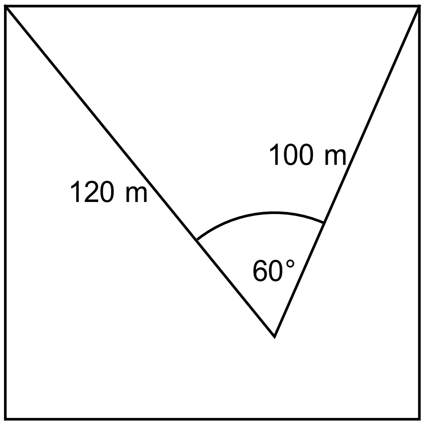
$$x = 64,3\,m$$

b) S = ?

$$S = x \cdot 30 = 64,3 \cdot 30 = 1929\,m^2$$

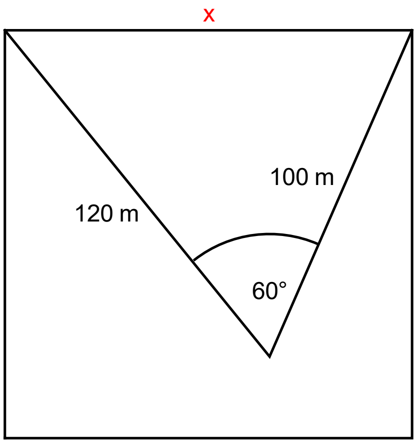
Obsah obdélníkového pozemku je 1 929 m².

13) Uvnitř čtvercového pozemku se žáci učili obsluhovat měřicí přístroje – teodolit a laserový dálkoměr. Našli si místo, z něhož viděli jednu stranu pozemku pod úhlem 60°. Poté určili vzdálenost tohoto místa od krajních bodů sledované strany (120 m a 100 m).



Jaký je obsah čtvercového pozemku?

Řešení



a) $x = ?$

$x^2 = 120^2 + 100^2 - 2 \cdot 120 \cdot 100 \cdot \cos 60°$

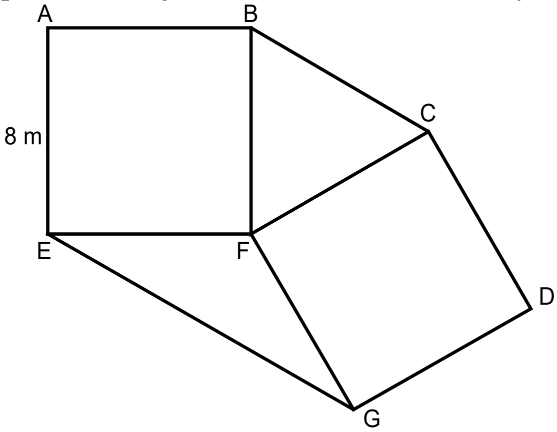
$x^2 = 12\,400$

b) $S = ?$

$S = x^2 = 12\,400\, m^2$

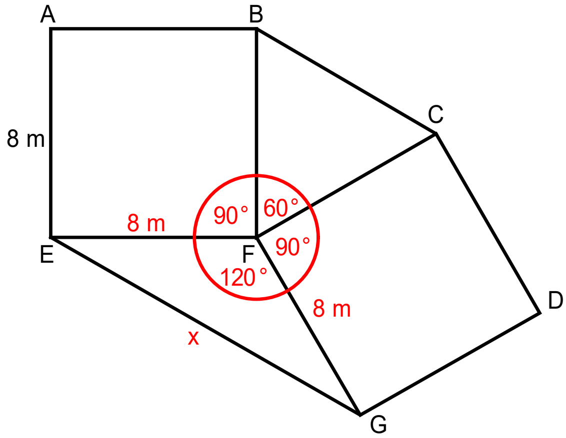
Obsah čtvercového pozemku je 12 400 m^2.

14) Šestiúhelník ABCDGE se skládá ze dvou čtverců EFBA, FGDC, rovnostranného trojúhelníku FBC a tupoúhlého trojúhelníku EGF. Délka strany AE je 8 m.



Určete délku strany EG.

Řešení



Pomocí kosinové věty:

$$x^2 = 8^2 + 8^2 - 2 \cdot 8 \cdot 8 \cdot \cos 120°$$

$$x = 8 \cdot \sqrt{3}\ cm$$

Délka strany EG je $8\sqrt{3}$ cm.