Jehlan, kužel

Příklady

1) Odlitek tvaru pravidelného čtyřbokého jehlanu s podstavnou hranou délky 72 cm a výškou 15 cm je zhotoven z materiálu o hustotě 7 800 kg/m^3.Vypočítejte jeho hmotnost.

2) Vypočítejte objem rotačního kužele, jehož obvod podstavy je 185 cm a strana má délku 80 cm.

3) Povrch kužele je 350 cm^2. Osovým řezem kužele je rovnostranný trojúhelník. Vypočítejte objem kužele.

4) Nádoba tvaru kužele s průměrem 40 cm a stranou délky 52 cm je zcela naplněna vodou. Vodu přelijeme do nádoby, která má tvar válce o poloměru dna 30 cm a výšce 25 cm. Kolik litrů vody je třeba do nádoby tvaru válce dolít, aby byla zcela naplněna?

5) Plechová stříška tvaru kužele má průměr podstavy 185 cm a výšku 210 cm. Vypočítejte spotřebu barvy na natření této stříšky, spotřebuje-li se 1 kg barvy na 5 m^2 plechu.

6) Nádobka tvaru kužele o poloměru podstavy 25 cm a výšce 40 cm byla zcela naplněna vodou. Voda byla přelita do nádoby tvaru válce o poloměru podstavy 24 cm. Jak vysoko byla v nádobě tvaru válce voda?

7) Plášť rotačního kužele má obsah 486 cm^2. Poloměr podstavy daného kužele je $r = 6$ cm. Vypočítejte objem kužele.

8) Střecha sadového altánu má tvar rotačního kužele o průměru podstavy $d = 6$ m. Strana s kužele má od roviny podstavy odchylku $\alpha = 35°$. Vypočítejte spotřebu plechové krytiny na tuto střechu, když se na záhyby a odpad připočítává 15% plechové krytiny.

9) Vrchol věže má tvar pravidelného šestibokého jehlanu. Podstavná hrana má délku 1,2 m, výška jehlanu je 2,5 m. Kolik metrů čtverečných plechů je třeba na pokrytí vrcholu věže, je-li na spoje, překrytí a odpad zapotřebí 15 % plechu navíc?

Řešení

1) Odlitek tvaru pravidelného čtyřbokého jehlanu s podstavnou hranou délky 72 cm a výškou 15 cm je zhotoven z materiálu o hustotě 7 800 kg/m^3.Vypočítejte jeho hmotnost.

Řešení

Nejprve převedeme rozměry jehlanu na m, protože hustota je v kg/m^3.

$a = 72\,cm = 0,72\,m$

$v = 15\,cm = 0,15\,m$

Vypočítáme objem jehlanu, všechny potřebné veličiny známe, a pak jeho hmotnost.

$$V = \frac{1}{3}S_p \cdot v = \frac{1}{3}a^2 \cdot v = \frac{1}{3} \cdot 0,72^2 \cdot 0,15 = 0,026\,m^3$$

$m = \rho \cdot V = 7800 \cdot 0,026 = 202,8\,kg$

Hmotnost odlitku je 202,8 kg.

---

2) Vypočítejte objem rotačního kužele, jehož obvod podstavy je 185 cm a strana má délku 80 cm.

Řešení

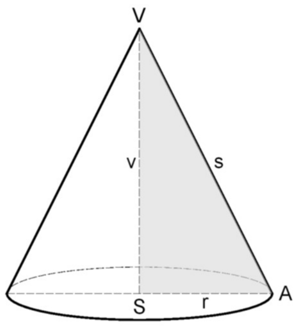
$o = 185\,cm$

$s = 80\,cm$

Z obvodu podstavy vypočítáme její poloměr.

$$o = 2\pi r \;\Rightarrow\; r = \frac{o}{2\pi} = \frac{185}{2 \cdot 3,14} = 29,5\,cm$$

Pro výpočet objemu kužele potřebujeme znát jeho výšku, tu určíme pomocí Pythagorovy věty z pravoúhlého trojúhelníku SAV.



$$v = \sqrt{s^2 - r^2} = \sqrt{80^2 - 29,5^2} = 74,4\,cm$$

Objem kužele

$$V = \frac{1}{3}S_p \cdot v = \frac{1}{3} \cdot \pi r^2 \cdot v = \frac{1}{3} \cdot 3,14 \cdot 29,5^2 \cdot 74,4$$

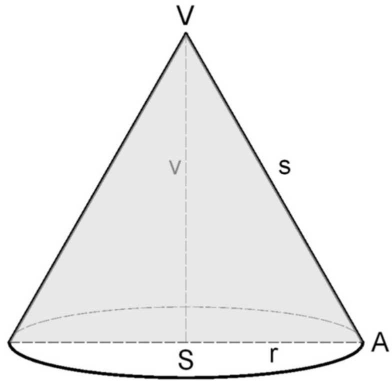
$V = 67768\ cm^3$

Objem kužele je 67 768 cm^3.

---

3) Povrch kužele je 350 cm². Osovým řezem kužele je rovnostranný trojúhelník. Vypočítejte objem kužele.

Řešení



$S = 350\,cm^2$

Protože osovým řezem je **rovnostranný** trojúhelník, tak $s = 2r$.

$S = \pi r^2 + \pi rs$, dosadíme $S = 350\,cm^2$ a $s = 2r$

$350 = \pi r^2 + \pi r \cdot 2r$

$350 = \pi r^2 + 2\pi r^2$

$350 = 3\pi r^2$

$r = \sqrt{\dfrac{350}{3 \cdot 3{,}14}} = 6{,}1\,cm$

$s = 2r = 12{,}2\,cm$

Pro výpočet objemu ještě musíme vypočítat výšku kužele.

$v = \sqrt{s^2 - r^2} = \sqrt{12{,}2^2 - 6{,}1^2} = 10{,}6\,cm$

$V = \dfrac{1}{3}\pi r^2 \cdot v = \dfrac{1}{3} \cdot 3{,}14 \cdot 6{,}1^2 \cdot 10{,}6 = 412{,}8\,cm^3$

Objem kužele je 412,8cm³.

---

4) Nádoba tvaru kužele s průměrem 40 cm a stranou délky 52 cm je zcela naplněna vodou. Vodu přelijeme do nádoby, která má tvar válce o poloměru dna 30 cm a výšce 25 cm. Kolik litrů vody je třeba do nádoby tvaru válce dolít, aby byla zcela naplněna?

Řešení

Máme vypočítat objem vody v litrech, proto všechny rozměry převedeme na dm.

kužel	**válec**
$d = 40\,cm = 4\,dm$ $r = 2\,dm$ $s = 5{,}2\,dm$ Pro výpočet objemu potřebujeme znát výšku kužele. $v = \sqrt{s^2 - r^2} = \sqrt{5{,}2^2 - 2^2} = 4{,}8\,dm$ $V = \frac{1}{3}\pi r^2 \cdot v = \frac{1}{3} \cdot 3{,}14 \cdot 2^2 \cdot 4{,}8 = 20{,}1\,dm^3$	$r = 30\,cm = 3\,dm$ $v = 25\,cm = 2{,}5\,dm$ $V = S_p \cdot v = \pi r^2 \cdot v = 3{,}14 \cdot 3^2 \cdot 2{,}5 = 70{,}7\,dm^3$

Ještě je potřeba dolít $\mathbf{70{,}7 - 20{,}1 = 50{,}6\,dm^3 = 50{,}6\,l}$.

---

5) Plechová stříška tvaru kužele má průměr podstavy 185 cm a výšku 210 cm. Vypočítejte spotřebu barvy na natření této stříšky, spotřebuje-li se 1 kg barvy na 5 m^2 plechu.

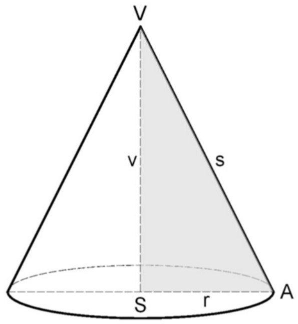
Řešení

Nejprve převedeme jednotky:

$d = 185\,cm = 1{,}85\,m$

$r = 0{,}925\,m$

$v = 210\,cm = 2{,}1\,m$



Stříška je plášť kužele, pro výpočet jeho obsahu potřebujeme znát stranu s. Určíme ji pomocí Pythagorovy věty z pravoúhlého trojúhelníku o stranách v, r, s:

$s = \sqrt{2{,}1^2 + 0{,}925^2} = 2{,}29\,m$

Obsah pláště je:

$S_{pl} = \pi rs = 3{,}14 \cdot 0{,}925 \cdot 2{,}29 = 6{,}65\,m^2$

Spotřeba barvy: $6{,}65 : 5 = 1{,}33\ kg$

Na natření střechy je potřeba 1,33 *kg* barvy.

---

6) Nádobka tvaru kužele o poloměru podstavy 25 cm a výšce 40 cm byla zcela naplněna vodou. Voda byla přelita do nádoby tvaru válce o poloměru podstavy 24 cm. Jak vysoko byla v nádobě tvaru válce voda?

Řešení

kužel	**válec**
$r = 25\,cm$	$r = 24\,cm$
$v = 40\,cm$	$V = 26166{,}7\,cm^3$
$V = \frac{1}{3}\pi r^2 \cdot v = \frac{1}{3} \cdot 3{,}14 \cdot 25^2 \cdot 40 = 26166{,}7\,cm^3$	$V = \pi r^2 \cdot v$
	$v = \frac{V}{\pi r^2} = \frac{26166{,}7}{3{,}14 \cdot 24^2} = 14{,}5\,cm$

Voda sahá do výšky 14.5 cm.

---

7) Plášť rotačního kužele má obsah 486 cm^2. Poloměr podstavy daného kužele je r = 6 cm. Vypočítejte objem kužele.

Řešení

$S_{pl} = 486\,cm^2$

$r = 6\,cm$

$S = \underbrace{\pi r^2}_{podstava} + \underbrace{\pi rs}_{plášť}$

$S = \pi rs$

$486 = 3{,}14 \cdot 6 \cdot s$

$s = \frac{486}{3{,}14 \cdot 6} = 25{,}8\,cm$

$v = \sqrt{s^2 - r^2} = \sqrt{25{,}8^2 - 6^2} = 25{,}1\,cm$

$V = \frac{1}{3}\pi r^2 \cdot v = \frac{1}{3} \cdot 3{,}14 \cdot 6^2 \cdot 25{,}1 = 946\,cm^3$

Objem kužele je 946 cm^3.

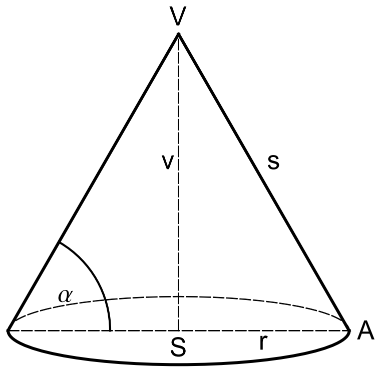
8) Střecha sadového altánu má tvar rotačního kužele o průměru podstavy d = 6 m. Strana s kužele má od roviny podstavy odchylku α = 35°. Vypočítejte spotřebu plechové krytiny na tuto střechu, když se na záhyby a odpad připočítává 15% plechové krytiny.

Řešení

$d = 6\,m$

$r = 3\,m$

$\alpha = 36°$



Pro výpočet povrchu potřebujeme znát stranu s.

$$\cos\alpha = \frac{r}{s} \Rightarrow s = \frac{r}{\cos\alpha} = \frac{3}{\cos 35°} = 3,7\,m$$

Pokrývá se pouze plášť kužele.

$$S_{pl} = \pi r s = 3,14 \cdot 3 \cdot 3,7 = 34,9\,m^2$$

Připočteme 15%:

$$\frac{34,9}{100} \cdot 115 = 40,1\,m^2$$

Je potřeba 40 m² krytiny.

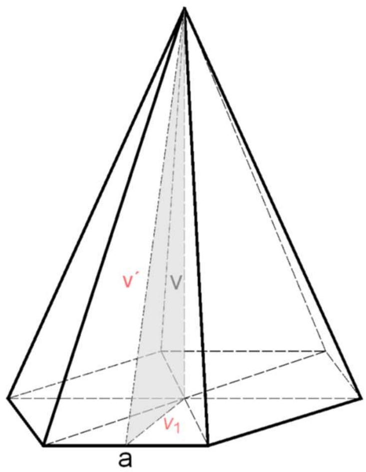
---

9) Vrchol věže má tvar pravidelného šestibokého jehlanu. Podstavná hrana má délku 1,2 m, výška jehlanu je 2,5 m. Kolik metrů čtverečných plechu je třeba na pokrytí vrcholu věže, je-li na spoje, překrytí a odpad zapotřebí 15 % plechu navíc?

Řešení

$a = 1,2\,m$

$v = 2,5\,m$



Plechem se bude pokrývat plášť jehlanu, který tvoří šest shodných rovnoramenných trojúhelníků.
Pro výpočet obsahu jednoho z nich potřebujeme znát stěnovou výšku v´ a k jejímu výpočtu potřebujeme nejprve znát v_1.
Podstava pravidelného šestibokého jehlanu se skládá z šesti shodných **rovnostranných** trojúhelníků. Jejich výšku v_1 můžeme určit pomocí vzorce z MFCHT:

$$v_1 = \frac{a}{2}\sqrt{3} = \frac{1,2}{2} \cdot \sqrt{3} = 1,04\,m$$

Stěnovou výšku v´ určíme pomocí Pythagorovy věty:

$$v' = \sqrt{v_1^2 + v^2} = \sqrt{1,04^2 + 2,5^2} = 2,71\,m$$

Obsah pláště je roven součtu obsahů 6-ti rovnoramenných trojúhelníků:

$$S_{pl} = 6 \cdot \frac{a \cdot v'}{2} = 6 \cdot \frac{1,2 \cdot 2,71}{2} = 9,76\,m^2\,6$$

Přičteme 15% navíc:

$$\frac{9,76}{100} \cdot 115 = 11,22\,m^2$$

Na pokrytí věže je potřeba 11,22 m² plechu.